27. VIRTA JA RESISTANSSI

Pääkohdat:

1. Sähkövirran ja virtatiheyden määritelmät
2. Resistanssin ja ominaisvastuksen määritelmät sekä lämpötilariippuvuus
3. Ohmin laki

Seuraavassa ryhdymme tarkastelemaan varauksen liikettä eli sähkövirtaa sekä sen riippuvuutta potentiaalierosta eli jännitteestä. Ensimmäiset kokeet sähkövirralla olivat staattisten varausten purkamiseen liittyviä ja myöhemmin, 1700-luvun lopulla, Luigi Galvanin kokeet sammakon reisillä. Alessandro Volta (1745–1827) toisti Galvanin kokeet ja kehitti lopulta ensimmäisen sähköparin kupari- ja sinkkielektrodien sekä suolaliuoksen avulla vv. 1796–1799.

Sähköpariston avulla saatiin lopulta aikaan"pysyviä" sähkövirtoja. Tämän jälkeen saattoi sähkön hyötykäyttö alkaa.

27.1. Sähkövirta

Varausten liikkuessa johtimessa sähkövirta on johtimen poikkipinnan läpi siirtynyt varaus aikayksikössä, $I_{av} = \Delta Q / \Delta t$, ja jos se ei ole vakio, niin voidaan määritellä hetkellinen virta

$$I = dQ/dt. \qquad (27.1)$$

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri, 1 A = 1 C/s.

Miltei aina on samantekevää havaintojen kannalta kuljettavatko virtaa positiiviset varauksenkuljettajat vai negatiiviset varauksenkuljettajat (liikkumalla vastakkaiseen suuntaan). Poikkeuksena on mm. Hall-ilmiö, jossa varaustenkuljettajien liikesuunta voidaan päätellä.

Virta kulkee (positiivisena) korkeammasta potentiaalista matalampaan potentiaaliin päin. Jatkuva virta saadaan syntymään johtimeen vain suljetussa virtapiirissä, jossa jokin jännitelähde saa aikaan potentiaalieron eli jännitteen. Virran kulkiessa johdin pysyy neutraalina, se luovuttaa toisesta päästään varausta sitä mukaa kuin ottaa vastaan varausta toisesta päästään.

Sähkökenttä johtimessa

Virran kulkiessa varausjakautuma ei ole staattinen ja virtaa kuljettaakin johtimen pintaosissa sähkökenttä, joka ei ole kohtisuorassa johtimen pintaa vastaan.

Elektronien liike metallissa

Elektronien lämpöliikkeen aiheuttamat nopeudet metallissa ovat luokkaa 10^5 m/s ja sähkövirran aiheuttamat nopeudet vain luokkaa 10^{-4} m/s.

Elektronien lämpöliikettä ja virran kulkua metallissa voisi verrata molekyylien lämpöliikkeeseen kaasussa ja kaasun liikkeeseen esim. tuulen mukana tai paine-eron vuoksi.

27.2. Virtatiheys

Elektronien satunnainen liike elektronikaasussa ei siis vaikuta virrankulkuun suoranaisesti, vaan se seuraa elektronikaasun kollektiivisesta ajautumisnopeudesta (drift velocity) $-\mathbf{v}_d$ ja liikkeestä johdinta pitkin. Jos varauksenkuljettajien hiukkastiheys on n (hiukkasta/m^3), johtimen osassa, jonka pituus on ℓ ja poikkileikkauksen pinta-ala on A, on varauksenkuljettajien kokonaisvaraus $\Delta Q = n\,(A\ell)\,q$, missä q on varauksenkuljettajahiukkasten varaus. (Huomaa, että johdin on kuitenkin neutraali) Tämä varaus liikkuu johtimen poikkipinnan läpi ajassa $\Delta t = \ell / v_d$, joten virta $I = \Delta Q / \Delta t$ on

$$I = n\,A\,q\,v_d. \qquad (27.2)$$

Keskimääräinen virtatiheys

$$J = I / A, \qquad (27.3)$$

jonka SI-yksikkö on A/m^2.

Vaikka virta on skalaarisuure, virtatiheys voidaan määritellä vektoriksi, jonka suunta on elektronikaasun liikesuunnalle vastakkainen $\mathbf{v}_d$ ja siten

$$\mathbf{J} = n\,q\,\mathbf{v}_d. \qquad (27.4)$$

Jos virtatiheys ei ole vakio johtimen poikkipinnan läpi, niin

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Esim. 27.1: Kuparijohdossa, jonka poikkipinta on 0.05 cm^2, kulkee 10 A virta. Laske elektronikaasun kollektiivinen "drift"nopeus.

$N_A = 6.02 \times 10^{23}$ hiukk./mol
kuparille:
$\rho = 8.9$ g cm^{-3}
$M = 63.5 \times 10^{-3}$ kg / mol

27.3. Resistanssi

V. 1772 Henry Cavendish tutki eri aineiden sähkönjohtavuuksia ja havaitsi niissä merkittäviä eroja. Stephen Gray oli tosin jo v. 1729 erottanut johteet ja eristeet.

Johteen tai johtimen resistanssi kahden pisteen välillä on

$$R = V / I , \qquad (27.5)$$

jonka SI-yksikkö on ohmi, $1\ \Omega = 1$ V/A. Siis, jos ns. vastuksen resistanssi on 1Ω, tarvitaan 1V jännite synnyttämään siihen 1A virta.

Liikkuessaan sähkökentässä elektronikaasun elektronit ovat kiihtyvässä liikkeessä saaden kentästä lisää kineettistä energiaa. Toisaalta elektronit menettävät kineettistä energiaansa lämmöksi törmäyksissä atomien kanssa. Elektronikaasun rajanopeus v_d onkin sellainen elektronien keskimääräinen nopeus, jossa nämä kaksi energianvaihtoprosessia ovat tasapainossa. Rajanopeus v_d on verrannollinen sähkökenttään, $\mathbf{v}_d \propto \mathbf{E}$. Toisaalta $\mathbf{J} = n q \mathbf{v}_d$, joten $\mathbf{J} \propto \mathbf{E}$ eli

$$\mathbf{J} = 1/\rho\ \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} , \qquad (27.6)$$

missä ρ on ominaisvastus eli resistiivisyys ja σ on ominaisjohtavuus.

Eräiden aineiden ominaisvastuksia.

Aine	ρ (Ωm)	Lämpötilakerroin (C^{-1})
Mica (kiille)	2×10^{15}	-50×10^{-3}
Lasi	$10^{12} - 10^{13}$	-70×10^{-3}
Pii	2200	-0.7
Germanium	0.45	-0.05
Grafiitti	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Teräs	40×10^{-8}	8×10^{-4}
Hopea	1.5×10^{-8}	3.8×10^{-3}

Tarkastellaan sylinterin muotoista johdinta, pituus ℓ ja poikkipinta A. Tällöin $E = V / \ell$ ja koska $J = I / A = E / \rho$,

$$I = \frac{A}{\rho\, \ell} V . \qquad (27.7)$$

Koska $R = V / I$, saadaan

$$R = \frac{\rho\, \ell}{A} . \qquad (27.8)$$

Ominaisvastuksen lämpötilariippuvuus

Tavallisesti

$$\rho = \rho_0 [\, 1 + \alpha\, (T - T_0) \,] , \qquad (27.9)$$

missä α on ominaisvastuksen lämpötilakerroin ($°C^{-1}$). Tämän yhtälön pätevyysalue on kuitenkin suppea ja laajalla lämpötila-alueella $\rho = \rho(T)$ on epälineaarinen.

Metallin ominaisvastukseen vaikuttavat metalliatomien lämpövärähtely sekä epäpuhtaudet ja kidevirheet. Puolijohteiden ominaisvastukseen vaikuttavat varauksenkuljettajatiheyden lämpötilariippuvuus sekä seosteaineet. Suprajohteiden ominaisuus $\rho = 0$, kun $T < T_C$, on taas puhdas kvantti-ilmiö.

27.4. Ohmin laki

Jos resistanssi on vakio, niin yhtälön (27.5) mukaan

$$V = I R, \tag{27.10}$$

eli

jännite ja virta ovat suoraan verrannollisia ja verrannollisuuskertoimena on resistanssi.

Tämä on Ohmin laki, jonka Georg S. Ohm muotoili v. 1827 kokeellisiin havaintoihinsa perustuen. Mikroskooppiseksi Ohmin laiksi sanotaan riippuvuutta $J = \sigma E$, kun $\sigma = 1/\rho$ on vakio.

Aineen tai laitteen sanotaan ohminen, jos se noudattaa Ohmin lakia. Tällaisia ovat vastukset. Ohmisen laitteen tai komponentin virta–jännite-ominaiskäyrä on suora.

27.5. Sähköteho

Kun varaus q liikkuu jännitteen V yli, on sen potentiaalienergian muutos $U = q V$. Varausten liikkuessa virran I mukana on teho $P = dU/dt = dq/dt\ V$ eli

$$P = I V. \tag{27.11}$$

Koska $V = I R$,

$$P = I^2 R = V^2 / R. \tag{27.12}$$

Tehon SI-yksikkö on watti (W).

Esim. 27.3: Lämpövastuksen teho on 1000 W nimellisjännitteellä 120 V. (a) Mikä on nimellisvirta? (b) Mikä on teho, jos jännite putoaa arvoon 110 V?

Esim. Korkeajännitelinja voimalan ja kaupungin välillä on rakennettu kahdesta $4\ \Omega$ kuparijohdosta. Mikä on virta, kun jännite on 230 kV ja siirrettävä teho on 170 MW? Kuinka paljon tehoa menetetään Joulen lämpönä siirtolinjassa? Mikä olisi Joulen lämpö(häviö), jos linjan jännite olisi vain 220 V?

27.6. Johtavuuden klassillinen teoria

P.K. Drude esitti v. 1900 kuinka aineen ominaisvastus ja Ohmin laki voidaan selittää "klassillisten elektronien" liikkeen avulla.

Kun $\mathbf{E} = 0$, ovat elektronien nopeusvektorit $\mathbf{v}$ suuntautuneet satunnaisesti. Sähkökentässä $\mathbf{E} \neq 0$ elektronit saavat kiihtyvyyden $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$, missä m on elektronien massa. Jos elektronit liikkuvat keskimäärin ajan Δt törmäystensä välillä, ehtii niiden nopeus kasvaa keskimäärin $\Delta\mathbf{v} = -(e\mathbf{E}/m)\,\Delta t$. Törmäysten jälkeen elektronien nopeusvektorien suunnat ovat taas (miltei) satunnaiset.

Elektronikaasun keskimääräinen nopeus on siten suuruusluokkaa $\Delta\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_d\ (= 1/2\ \Delta\mathbf{v}\ )$ ja kun τ on keskimääräinen törmäysväli, niin $\mathbf{v}_d = -e\mathbf{E}\tau/m$. Siten $J = nev_d = ne^2E\tau/m = (1/\rho)\,E$. Ts. Ohmin laki on voimassa, kun

$$\rho = \frac{m}{n\,e^2\,\tau}\,. \qquad (27.13)$$

Esim. kuparille $\tau = m / (ne^2\rho) = 5 \times 10^{-14}$ s. Klassillisena teoriana tässä selityksessä on kuitenkin puutteita, esim. lämpötilariippuvuuden selittäminen ei onnistu.

28. TASAVIRTAPIIRIT

Pääkohdat:
1. Lähdejännite (sähkömotorinen voima)
2. Kirchhoffin lait
3. Vastusten sarjaan- ja rinnankytkennät
4. RC-virtapiirit

Tarkastellaan seuraavassa tasavirtoja. Virtaa sanotaan tasavirraksi, jos sen suunta ei vaihtele.

28.1. Lähdejännite

Jännitelähde on laite, joka saa aikaan potentiaalieron eli jännitteen ja suljetussa virtapiirissä sähkövirran. Jännitelähde voi muuntaa jotakin muuta energian muotoa, esim. kemiallista-, lämpö-, säteily- tai mekaanista energiaa sähköstaattiseksi potentiaalienergiaksi erottamalla positiivisia ja negatiivisia varauksia. Jännitelähteen ns. lähdejännite (electromotive force (emf), sähkömotorinen voima → smv) on

$$\mathcal{E} = W / q , \qquad (28.1)$$

missä W on varausten q ja $-q$ erottamiseksi tehty työ. Tämä sama työ vapautuu sähköisenä energiana, muuttuen sitten esim. lämmöksi vastuksessa, kun erotettu varaus kiertää ulkoisen virtapiirin kautta jännitelähteen navasta toiseen.

Lyijyakku

Kun akun navat on kytketty tapahtuu

[–] katodilla reaktio

$$Pb + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4 \downarrow + 2e^-,$$

jossa vapautuu kaksi elektronia, ja

[+] anodilla reaktio

$$PbO_2 + 4\,H^+ + SO_4^{2-} + 2e^- \rightarrow PbSO_4 \downarrow + 2\,H_2O ,$$

joka sitoo kaksi elektronia. Tämän seurauksena syntyy vettä ja lyijysulfaattia kerrostuu molemmille elektrodeille sekä akkunesteen rikkihappopitoisuus laskee.

Näissä reaktioissa vapautuu yhteensä 2.05 eV energiaa elektronia kohti. Siten lyijyakun jännite on $\mathcal{E} = W / q = 2.05$ V.

Akun latausvaiheessa nämä reaktiot tapahtuvat vastakkaisiin suuntiin.

Jännitelähteen sisäinen resistanssi

Ideaalisen jännitelähteen jännite pysyy vakiona kaikissa olosuhteissa. Todellisilla jännitelähteillä on kuitenkin sisäinen resistanssi r, joka aiheuttaa jännitehäviön $r\,I$, kun jännitelähdettä kuormitetaan virralla I. Siten jännitelähteen napojen a ja b välinen jännite, ns. napajännite, on

$$V_{ba} = V_b - V_a = \mathcal{E} - I\,r. \qquad (28.2)$$

Ideaalisella jännitelähteellä ($r = 0$) tai kuormittamattomalla jännitelähteellä ($I = 0$) on siten $V_{ba} = \mathcal{E}$.

28.2. Kirchhoffin lait

Virtapiirien tuntemattomien virtojen (tai resistanssien tai jännitelähteiden) ratkaisemiseen voidaan käyttää ns. Kirchhoffin lakeihin perustuvia menetelmiä.

Haarapistemenetelmä

Haarapistemenetelmä perustuu Kirchhoffin 1. lakiin (junction rule):

Virtapiirin jokaisessa haarapisteessä on siihen tulevien virtojen summa yhtäsuuri kuin siitä lähtevien virtojen summa

eli

$$\Sigma_i I_i = 0. \qquad (28.3)$$

Tämä seuraa suoraan varauksen säilymislaista.

Haarapistemenetelmää voidaan käyttää apuna seuraavassa ns. silmukkamenetelmässä.

Silmukkamenetelmä

Silmukkamenetelmä perustuu Kirchhoffin 2. lakiin (loop rule):

Virtapiirin minkä tahansa suljetun silmukan jännitteiden summa on nolla

eli

$$\Sigma_i V_i = 0. \qquad (28.4)$$

Tämä seuraa suoraan energiansäilymislaista varaukselle, joka kiertää koko suljetun silmukan virtapiirissä.

Soveltaminen:

1. Piirretään virtapiiriin niin monta riippumatonta suljettua silmukkaa kuin mahdollista (tai tarpeellista).

2. Merkitään silmukoiden virrat suuntineen.

3. Sovelletaan Kirchhoffin 2. lakia erikseen kuhunkin silmukkaan, joista jokainen antaa yhden yhtälön.

HUOM! Merkkisääntö!

4. Ratkaistaan yhtälöistä tuntemattomat suureet.

Esim. Ratkaise oheisen piirin virta.

Esim. Ratkaise oheisen piirin virrat sekä silmukka- että solmupistemenetelmällä.

28.3. Resistanssien sarjaan- ja rinnankytkennät

Kahden vastuksen sarjaankytkennässä $V = V_1 + V_2 = I R_1 + I R_2 = I (R_1+R_2) = I R$, joten $R = R_1 + R_2$. Yleistettynä N kappaleelle sarjaankytkettyjä vastuksia tulee kokonaisresistanssiksi

$$R = R_1 + R_2 + ... + R_N. \tag{28.5}$$

Kahden vastuksen rinnankytkennässä $I = I_1 + I_2 = V / R_1 + V / R_2 = V (1/R_1 + 1/R_2) = V / R$, joten $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, ja yleistettynä N kappaleelle rinnankytkettyjä vastuksia tulee kytkennän kokonaisresistanssiksi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_N}. \tag{28.6}$$

Siis sarjaankytkettyjen vastusten yhteinen resistanssi on suurempi kuin kytkennän suurin resistanssi ja rinnankytkettyjen vastusten resistanssi on pienempi kuin kytkennän pienin resistanssi.

Esim. 28.1: Määrää oheisen kytkennän resistanssi.

Esim. 28.3: Jännitelähteen $\mathcal{E}$ sisäinen resistanssi on r ja siihen kytketyn kuorman resistanssi on R. Kuinka kuorman ottama teho riippuu sen resistanssista R? Milloin se on suurin?

28.4. RC-piirit

Tarkastellaan seuraavassa kondensaattorin varaamista ja purkamista virtapiirissä. Näihin tapahtumiin liittyy suuruudeltaan muuttuva tasavirta, koska piirissä on aina resistanssia ja resistanssin yli oleva jännite muuttuu kondensaattorin varautumisasteen muuttuessa.

(i) Kondensaattorin varauksen purkautuminen

Tarkastellaan oheisen kuvan virtapiiriä, jossa hetkellä $t = 0$ jännitelähde irroitetaan kytkimellä piiristä. Aluksi kondensaattorin varaus on $Q_0 = C\,\mathcal{E}$. Silmukkasäännön mukaan on voimassa koko purkautumisprosessin ajan $Q/C - I\,R = 0$, missä varaus Q ja virta I muuttuvat (pienenevät) ajan kuluessa. Toisaalta virta on $I = -\,dQ/dt$, jolloin saadaan

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{R\,C}\,.$$

Tämä voidaan integroida

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R\,C}\int dt\,,$$

josta saadaan

$$\ln Q = -\frac{t}{R\,C} + A\,,$$

missä A on integrointivakio. Alkuehdosta $Q(t=0) = Q_0$ seuraa $A = \ln Q_0$. Sijoittamalla tämä ja käyttämällä eksponenttifunktiota saadaan lopulta

$$Q = Q_0\, e^{-t/RC} \qquad (28.7)$$

$Q(t) = Q_0\, e^{-t/RC}$ on esitetty oheisessa kuvassa. Varaus siis pienenee eksponentiaalisesti aikavakiolla

$$\tau = RC. \qquad (28.8)$$

Aikavakion kuluttua varaus on pienentynyt $1/e$ -osaansa (37%) alkuperäisestä arvostaan.

Puoliintumisaikansa $T_{1/2}$ kuluttua varaus on pienentynyt puoleen alkuperäisestä arvostaan, joten $1/2\; Q_0 = Q_0\, e^{-T_{1/2}/RC}$, ja

$$T_{1/2} = RC \ln 2 = 0.693\,\tau. \qquad (28.9)$$

Virralle $I = -\,dQ/dt$ saadaan derivoimalla yhtälöstä (28.7)

$$I = I_0\, e^{-t/RC}, \qquad (28.10)$$

missä $I_0 = \mathcal{E}/R$ on virta aluksi, hetkellä $t = 0$. Virralla on siis sama aikariippuvuus kuin varauksellakin.

(ii) Kondensaattorin varautuminen

Tarkastellaan kondensaattorin varaamista resistanssin R kautta oheisessa kytkennässä. Olkoon kondensaattorin varaus aluksi, hetkellä $t = 0$, $Q_0 = 0$. Tällöin virta on $I_0 = \mathcal{E}/R$.

Silmukkasääntöä soveltamalla

$$\mathcal{E} - Q/C - IR = 0$$

ja

$$C\mathcal{E} - Q - IRC = 0.$$

Koska nyt $I = +\,dQ/dt$ saadaan, saadaan

$$C\mathcal{E} - Q = \frac{dQ}{dt} RC\,,$$

ja

$$\int \frac{dQ}{C\mathcal{E} - Q} = \frac{1}{R\,C} \int dt\,,$$

josta edelleen

$$-\ln\,(\,C\mathcal{E} - Q\,) = \frac{t}{R\,C} + k\,,$$

missä k on integroimisvakio. Alkuehdoista seuraa, että $k = -\ln\,(C\mathcal{E})$ ja siten

$$\ln\,(\,\frac{C\mathcal{E} - Q}{C\mathcal{E}}\,) = -\frac{t}{R\,C}$$

ja lopulta

$$Q = Q_0\,(1 - e^{-t\,/\,RC})\,, \qquad (28.11)$$

missä $Q_0 = C\mathcal{E}$ on kondensaattorin varaus hyvin pitkän ajan kuluttua. Aikariippuvuus on esitetty alla olevassa kuvassa.

Virta on

$$I = I_0\,e^{-t\,/\,RC}, \qquad (28.12)$$

missä siis $I_0 = \mathcal{E}\,/\,R$.

Esim. 28.7: Kondensaattoria, jonka kapasitanssi on $50\ \mu F$, varataan jännitteellä 200 V resistanssin $200\ k\Omega$ kautta. (a) Milloin kondensaattori on varautunut $90\ \%$ lopullisesta varauksestaan? (b) Mikä on kondensaattorin energia, kun $t = RC$? (c) Mikä on vastuksen tehohäviö, kun $t = RC$? (d) Mikä on jännitelähteestä otettu energia, kun $t = \infty$? (e) Mikä on kondensaattorin energia, kun $t = \infty$? (f) Mikä on vastuksen kuluttama energia, kun $t = \infty$?

29. MAGNEETTIKENTTÄ

Pääkohdat:

1. Magneettikentän määritelmä (magneettivuon tiheys)
2. Virtasilmukan momentti magneettikentässä
3. Galvanometrin periaate
4. Varattujen hiukkasten liike magneettikentässä
5. Hall-ilmiö

Luonnosta magneettiset ilmiöt löydettiin rautamalmikivien ominaisuutena. Ensimmäinen käytännön sovellutus oli kompassi, jota käytettiin erityisesti merenkulussa.

Kompassineulan sitä päätä, joka osoittaa pohjoiseen sanotaan magneettiseksi pohjoiseksi, joten maapallon maantieteellinen pohjoisnapa on maan magneettinen etelänapa (tai lähellä sitä).

Tanskalainen fysiikan professori Hans Christian Ørsted (1770 – 1851) havaitsi v. 1820, että kompassinneula liikkui salamoinnin aikana. Hän suoritti sitten eräällä luennolla laboratoriokokeen, jossa havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettisia voimia.

29.1. Magneettikenttä

Magneetit ovat dipoleja joiden välillä esiintyy veto- ja poistovoimia.

Magneettiset voimavaikutukset voidaan selittää magneettikentän avulla, samoin kuin sähköstaattiset voimat sähkökentän avulla.

Magneettisia monopoleja ei ole kokeellisesti havaittu. Jos magneettinen dipoli katkaistaan kahteen osaan, saadaan vain kaksi pienempää dipolia.

Magneettisen dipolin kenttäviivat ovat oheisen kuvan mukaiset. Magneettiset kenttäviivat ovat aina suljettuja, niillä ei ole alkua eikä loppua samalla tavoin kuin sähkökentän voimaviivoilla. Kenttäviivojen suunta on dipolin sisällä S -> N ja ulkopuolella N -> S.

Magneettikentän määritelmä

Koska magneettisia monopoleja ei voida käyttää magneettikentän määrittelyssä tarkastellaan sähkövaraukseen kohdistuvia voimavaikutuksia magneettikentässä. Havaitaan, että

(i) varaukseen vaikuttava voima on verrannollinen sen suuruuteen ja nopeuteen eli

$$F \propto q\,v.$$

(ii) Jos nopeusvektori $\mathbf{v}$ ja magneettikenttä muodostavat kulman θ, niin

$$F \propto \sin\theta.$$

Yhdistämällä nämä havainnot saadaan

$$F \propto q\,v \sin\theta$$

ja kirjoittamalla verrannollisuuskertoimeksi B

$$F = B\,q\,v \sin\theta. \qquad (29.1)$$

Verrannollisuuskerroin B kuvaa nyt magneettikentän voimakkuutta: mitä suurempi voima, sitä suurempi kenttä.

(iii) Lisäksi havaitaan, että voimavektori $\mathbf{F}$ on kohtisuorassa sekä nopeutta että kenttää vastaan.

Koska $v\,B\sin\theta = |\mathbf{v}\times\mathbf{B}|$, voidaan kirjoittaa

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}.} \qquad (29.2)$$

Näiden vektorisuureiden suuntien tarkasteluun voidaan käyttää esim. erästä oikean käden sääntöä.

Historiallisista syistä vektorikenttää $\mathbf{B}$ kutsutaan tavallisesti magneettivuon tiheydeksi. Oppikirja käyttää nimitystä magnetic field. Magneetivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla, $1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{kg/(A\,s^2)}$. Usein käytetään myös yksikköä gauss, $1\ \mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T}$. Maan magneettivuon tiheys on tyypillisesti noin $1/2$ G ja laboratorioissa voidaan tuottaa muutaman teslan vuon tiheyksiä.

Magneettikentän voimakkuudeksi sanotaan taas tavallisesti suuretta $\mathbf{H}$, jolle on voimassa tyhjiössä $\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}$, missä tyhjiön permeabiliteetti $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{NA^{-2}}$. Kentän voimakkuuden SI-yksiköksi tulee A/m. Nimitystä magneettikenttä voidaan käyttää molemmille suureille $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$, mikäli sekaannuksen vaaraa ei synny.

Esim. 29.1: Elektroni liikkuu vakionopeudella $\mathbf{v}$, $v = 10^6$ m/s, tarkkailijaa kohti homogeenisessa magneettikentässä $B = 50$ T, jonka suunta on ylöspäin. Millaisen voiman $\mathbf{F}_B$ kenttä aiheuttaa elektroniin? Mitä muita voimia elektroniin kohdistuu?

29.2. Virtajohtimeen vaikuttava voima magneettikentässä

Johtimessa sähkövirtaa I kuljettaviin elektroneihin (liikenopeus v_d) kohdistuu voima $-e\,\mathbf{v}_d\times\mathbf{B}$, joka on kohtisuorassa johtimen suuntaa vastaan.

Tarkastellaan johtimesta ℓ:n mittaista osaa, johon kohdistuva voima on $F = -N\,e\,\mathbf{v}_d\times\mathbf{B} = -n\,A\,\ell\ e\,\mathbf{v}_d\times\mathbf{B}$. Koska $I = dQ/dt = -n\,A\,\ell\,e\,/\,(\ell/v_d) = -n\,A\,e\,v_d$, voidaan kirjoittaa

$$\boxed{\mathbf{F} = I\,\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}} \qquad (29.3)$$

tai

$$F = I\,\ell\,B\sin\theta, \qquad (29.4)$$

missä θ on johtimen ja kentän suuntien välinen kulma.

Jos johdin ei ole suora tai kenttä $\mathbf{B}$ ei ole vakio, on pituuselementtiin $d\boldsymbol{\ell}$ kohdistuva voimaelementti

$$d\mathbf{F} = I\,d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B} \qquad (29.5)$$

integroitava yli koko kentässä olevan johtimen osan.

Esim. 29.2: Suora johdin, pituus 30 cm ja massa 50 g, on vaakasuorassa ja itä–länsi-suunnassa, paikassa, jossa maapallon magneettikenttä 0.8 G on vaakasuora. Kuinka suuri virta tarvittaisiin kannattelemaan johdinta maan painovoimakentässä?

29.3. Virtasilmukkaan vaikuttava vääntömomentti magneettikentässä

Magneettikentässä olevan suljetun virtasilmukan osiin vaikuttavat voimat kumoutuvat ja kokonaisvoimavaikutus häviää. Nämä voimat aiheuttavat kuitenkin vääntömomentin.

Tarkastellaan oheista suorakaiteen muotoista virtasilmukkaa, jonka tason normaali muodostaa kulman θ kentän $\mathbf{B}$ kanssa. Silmukan momentti on $\tau = F\,a/2\,\sin\theta + F\,a/2\,\sin\theta$, missä $F = I\,c\,B$. Siten $\tau = I\,a\,c\,B\,\sin\theta = I\,A\,B\,\sin\theta$, missä $A = a\,c$ on silmukan pinta-ala. Jos silmukassa on N kierrosta, on momentti N-kertainen.

Tällainen virtasilmukka on magneettinen dipoli, jonka magneettinen dipolimomentti on

$$\mu = N\,I\,A\,\hat{\mathbf{n}} = N\,I\,\mathbf{A}. \qquad (29.6)$$

Sen SI-yksikkö on Am^2. Käyttäen tätä määritelmää voidaan momentti kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\tau = \mu \times \mathbf{B},} \qquad (29.7)$$

missä μ-vektorin suunta on erään "oikean käden säännön" mukainen. Huomaa, että sähköiselle dipolille on voimassa samanlainen yhtälö (23.16) $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.

Samoin kuin sähköisen dipolin potentiaalienergia sähkökentässä on (23.17) $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, niin myös magneettisen dipolin μ potentiaalienergia magneettikentässä $\mathbf{B}$ on

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B}. \qquad (29.8)$$

Tällöin potentiaalienergialle on valittu $U = 0$, kun μ on kohtisuorassa kenttää $\mathbf{B}$ vastaan.

Esim. 29.6: Bohrin vetyatomin mallissa elektroni kiertää ydintä nopeudella 2.2×10^6 m/s radalla, jonka säde on 0.53×10^{-10} m. Mikä on kiertoliikkeen aiheuttama magneettinen momentti ja mikä on sen suhde liikemäärämomenttiin?

29.4. Galvanometri

Galvanometrillä mitataan virtoja virtasilmukkaan (käämiin) kohdistuvan ja virtaan verrannollisen vääntömomentin avulla.

29.5. Varatun hiukkasen liike magneettikentässä

Jos varatun hiukkasen nopeusvektori $\mathbf{v}$ on kohtisuora kenttää $\mathbf{B}$ vastaan, niin $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ on kohtisuora nopeusvektoria $\mathbf{v}$ vastaan ja $d/dt\, v^2 = d/dt\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2\,\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 2\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/m = 0$,eli vauhti on vakio. Hiukkanen jonka massa on m joutuukin keskeisliikkeeseen, jossa keskeiskiihtyvyyden v^2/r aiheutta voima $F = q\,v\,B$.
Siten

$$q\,v\,B = mv^2 / r\,, \qquad (29.9)$$

josta rataympyrän säteeksi saadaan

$$r = mv / qB.$$

Kiertoliikkeen jaksonpituudeksi tulee

$$T = 2\pi r / v = 2\pi m / qB \qquad (29.10)$$

ja taajuudeksi

$$f_c = q/m \cdot B/2\pi\,. \qquad (29.11)$$

Tätä taajuutta sanotaan syklotronitaajuudeksi. Huomaa, että

(i) syklotronitaajuus (ja jakson pituus) ei riipu hiukkasen nopeudesta ja

(ii) hiukkasilla, joilla on sama q/m on sama syklotronitaajuus.

Spiraalirata

Mikäli varatun hiukkasen nopeus ei ole kenttää vastaan kohtisuora, nopeusvektori voidaan jakaa kentän suuntaiseen $\mathbf{v}_{\|}$ ja sitä vastaan kohtisuoraan $\mathbf{v}_{\perp}$ komponenttiin ja tarkastella molempia liikkeen komponentteja erikseen, vrt. heittoliike. Kentän suuntainen komponentti on vakio, koska $\mathbf{F}_{\|} = \mathbf{v}_{\|} \times \mathbf{B} = 0$, ja kohtisuora liike on syklotroniliikettä, joten seurauksena on spiraalirata.

Jos kenttä on epähomogeeninen, varattu hiukkanen kokee voiman pienenevän kentän suuntaan. Tähän perustuu ns. magneettinen pullo.

29.6. Varauksen liike sähkö- ja magneettikentässä

Jos varattu hiukkanen kokee sekä sähkökentän $\mathbf{E}$ että magneettikentän $\mathbf{B}$, on hiukkaseen kohdistuva kokonaisvoima

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,(\,\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\,).} \qquad (29.12)$$

Tämä on ns. Lorentz-voima.

Ristikkäiset kentät

Tarkastellaan kenttiä $\mathbf{E} = -\mathrm{E}\,\hat{\mathbf{j}}$ ja $\mathbf{B} = -\mathrm{B}\,\hat{\mathbf{k}}$ sekä varattua (q) hiukkasta, joka saapuu kenttään nopeudella $\mathbf{v} = \mathrm{v}\,\hat{\mathbf{i}}$. Jotta nopeus(vektori) ei muuttuisi, on ehtona $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathrm{B}) = 0$, josta

$$\mathrm{v} = \mathrm{E}/\mathrm{B}. \qquad (29.13)$$

Tällä periaatteella voidaan konstruoida laite, joka "valikoi" varattujen hiukkasten suihkusta ne hiukkaset, joilla on tietty nopeus $\mathrm{v} = \mathrm{E}/\mathrm{B}$.

Massaspektrometri

Massaspektrometri on laite, jolla voidaan erotella varatut hiukkaset niiden m/q-suhteen perusteella. Siten voidaan erotella esim. (ionisoituja) atomeja ja molekyylejä jopa ytimien isotooppien perusteella. Ristikkäiset kentät $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}_1$ määräävät analysoivaan kenttään $\mathbf{B}_2$ tulevien hiukkasten nopeuden $\mathrm{v} = \mathrm{E}/\mathrm{B}_1$ ja koska (29.9) $qvB_2 = mv^2/r$,

$$m/q = B_1 B_2 r/E. \qquad (29.14)$$

Massaspektrometrin massanerottelukyky voi olla luokkaa $0.01\ \%$.

29.7. Syklotroni

Syklotroni on hiukkaskiihdytin, jota käytetään ytimien ja alkeishiukkasten tutkimuksessa. Syklotronilla voidaan antaa varatuille hiukkasille suuri energia (nopeus) törmäytyskokeita varten.

Syklotronin toiminta perustuu siihen, että edellä tarkastellun syklotroniliikkeen jakson pituus on riippumaton varatun hiukkasen nopeudesta. Toiminta lyhyesti on seuraava:

- Keskellä on varattujen hiukkasten lähde, joka emittoi ioneja tai hiukkasia toiseen ontoista D:n muotoisista sylinterin puoliskoista.
- Sylinterin puoliskot läpäisee magneettikenttä, joka saa hiukkaset syklotroniliikkeeseen tuoden ne puoliskojen väliseen rakoon jaksottain.
- Sylinterin puoliskojen välisessä raossa sähkökenttä antaa hiukkasille lisää energiaa (nopeutta).
- Kun hiukkasten radan säde on kasvanut riittävän suureksi, ohjataan ne ulos syklotronista törmäytyskokeita varten.

Huomaa, että sylinterin puoliskojen sisällä ei ole sähkökenttää ja raossa se vaihtaa suuntaansa syklotroniliikkeen tahdissa. Koko laitteistossa on oltava suurtyhjiö. Protoneille voidaan antaa syklotronissa noin 25 MeV energia.

Synkrosyklotronissa eli synkrotronissa otetaan huomioon hiukkasten massan suhteellisuusteorian mukainen kasvu ja jaksollinen kiihdytyskenttä synkronoidaan syklotroniliikkeen muuttuvan jakson pituuden kanssa. Tällä tavoin voidaan protoneita kiihdyttää 200 MeV energiaan saakka.

Koska kiihtyvässä liikkeessä, mm. keskeisliikkeessä, olevat varatut hiukkaset säteilevät sähkömagneettista säteilyä, syklotronia voidaan käyttää myös säteilylähteenä.

Esim. 29.10: Erään protonisyklotronin säde on 60 cm, magneettikenttä on 0.8 T ja kiihdytysjännite on 75 kV. Mikä on oltava kiihdytysjännitteen taajuuden? Mikä on protonien maksimienergia? Kuinka monta kierrosta protonit tekevät, jos ne lähtevät levosta?

$m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
$q_p = 1.602 \times 10^{-19}$ As $=$ e

29.8. Hall-ilmiö

Tarkastellaan magneettikentässä $\mathbf{B}$ olevaa metalliliuskaa, korkeus w ja paksuus t, kun siinä kulkee virta I. Positiivisiin varauksenkuljettajiin kohdistuu voima $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ (kuvassa ylöspäin), jonka seurauksena liuskan yläreuna tulee positiivisesti varatuksi virran kulkiessa. Vastaavasti alareuna tulee negatiivisesti varatuksi, kunnes tasapainossa $\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0$, missä $\mathbf{F}_E = q\,\mathbf{E}$. Siten $E = v_d B$ ja liuskan ylä- ja alareunan välille syntyy ns. Hall-jännite

$$V_H = E\,w = v_d\,B\,w. \qquad (29.15)$$

Koska $I = n\,q\,v_d\,A = n\,q\,v_d\,w\,t$, voidaan sijoittaa $v_d = I/(nqwt)$ edelliseen yhtälöön, jolloin

$$V_H = IB/nqt\,. \qquad (29.16)$$

Huomaa, että mikäli varauksenkuljettajat ovatkin negatiivisia, on magneettikentän aiheuttama voimavaikutus $\mathbf{F}_B$ edelleenkin samaan suuntaan (yllä kuvassa ylöspäin), mutta Hall-jännitteen merkki vaihtuu, koska voiman $\mathbf{F}_B$ suunta vaihtuu. Tällä tavoin voidaan varauksenkuljettajien merkki määrätä.

Hall-ilmiötä käytetään varauksenkuljettajien tiheyden määrittämiseen.

30. SÄHKÖVIRRAN MAGNEETTIKENTTÄ

Pääkohdat:

1. Pitkän virtajohtimen magneettikenttä ja virtajohtimien väliset voimavaikutukset
2. Biot–Savartin laki (magn. vastine Coulombin laille)
3. Ampèren laki (magn. vastine Gaussin laille)

30.1. Pitkän suoran virtajohtimen kenttä

Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttaman kentän kenttäviivat ovat johtimen ympärillä olevia renkaita, joiden keskipisteen johdin lävistää kohtisuorasti rengasta vastaan. Kentän suunta noudattaa jälleen "oikean käden sääntöä".

Biot ja Savart julkaisivat v. 1820 tutkimuksensa, jonka mukaan mitattu "kentän voimakkuus" $B \propto 1/R$, missä R on langasta mitattu etäisyys. Myöhemmin havaittiin, että kenttä on verrannollinen myös virtaan I. Siten

$$B = \mu_0 I / 2\pi R, \qquad (30.1)$$

missä $\mu_0/2\pi$ on verrannollisuuskerroin, jossa edelleen ns. tyhjiön permeabiliteetti $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A.

30.2. Yhdensuuntaisten virtajohtimien välinen magneettinen voima

Ampère demonstroi ensimmäisen kerran v. 1820 kahden yhdensuuntaisen virtajohtimen välisen voimavaikutuksen.

Tarkastellaan kuvan yhdensuuntaisia johtimia, joista I_1 aiheuttaa kentän $\mathbf{B}_1$ johtimen I_2 kohdalle. Tällöin johtimen I_2 osa $\boldsymbol{\ell}_2$ kokee voiman (29.3) $\mathbf{F}_{21} = I_2 \boldsymbol{\ell}_2 \times \mathbf{B}_1$ ja koska $\mathbf{B}_1 = \mu_0 I_1 / 2\pi d$, missä d on johtimien välinen etäisyys, saadaan

$$F_{21} = I_2 \ell_2 B_1 = I_2 \ell_2 \mu_0 I_1 / 2\pi d.$$

Vastaavasti I_2 vaikuttaa johtimeen I_1 voimalla $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Siten johtimien välinen voima pituusyksikköä kohti

$$F / \ell = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi d. \qquad (30.2)$$

Voima on vetovoima, jos virrat ovat samansuuntaiset, ja poistovoima, jos vastakkaiset.

Yhtälöllä (30.2) määritellään virran SI-yksikön A (ampeeri) suuruus. Virta $I_1 = I_2 = I = 1$ A, jos edellä olevassa koejärjestelyssä $F / \ell = 2 \times 10^{-7}$ N/m, kun $d = 1$ m.

30.3. Biot–Savartin laki

Kun verrataan pitkän suoran virtajohtimen magneettikentän yhtälöä (30.1)

$$B = 2k' I / R , \tag{30.3}$$

missä $k' = \mu_0 / 4\pi$, pitkän suoran varatun langan sähkökentän yhtälöön (23.9)

$$E = 2k \lambda / R , \tag{30.4}$$

missä $dq = \lambda \, d\ell$, ja tiedetään, että jälkimmäinen saadaan integroimalla (Esim. 23.7)

$$d\mathbf{E} = k\lambda \, d\ell / r^2 \cdot \hat{\mathbf{r}} \tag{30.5}$$

yli koko langan ℓ, voidaan olettaa magneettikentän infinitesimaalisen elementin olevan samaa muotoa yhtälön (30.5) kanssa.

Matemaatikko Laplacen vihjeiden avulla Biot ja Savart onnistuivatkin selvittämän tämän ja julkaisivat v. 1820 tuloksensa

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, d\ell \, \sin\theta}{r^2} , \tag{30.7}$$

joka voidaan kirjoittaa vektorimerkinnöillä muotoon

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} , \tag{30.6}$$

Tämä on Biot–Savartin laki.

Esim. 30.2. Määrää pitkän suoran virtajohtimen magneettikenttä Biot–Savartin lain avulla.

Esim. Neliön muotoisen virtasilmukan, jonka sivu on L, magneettikenttä neliön keskellä.

Esim. 30.3: Renkaassa, jonka säde on a, kiertää virta I. Laske magneettikenttä renkaan akselilla.

Esim. Mikä on vetyatomissa elektronin liikkeen aiheuttama magneettikenttä ytimessä esimerkin 29.6 tapauksessa?

Solenoidin kenttä

Kela koostuu useasta yhteen käämitystä virtasilmukasta. Jos silmukoita on hyvin paljon ja ne on käämitty tiukasti yhteen, sanotaan laitetta solenoidiksi. Solenoidin sisällä magneettikenttä on hyvin homogeeninen.

Esim. 30.4: Solenoidin pituus on ℓ ja säde on a, siinä on N kierrosta ja virta I. Mikä on magneettivuon tiheys solenoidin akselilla sen sisällä?

30.4. Ampèren laki

Ampère tutki myös sähkövirran aiheuttamaa magneettikenttää (suhtautuen kriittisesti Biotin ja Savartin tuloksiin) ja löysi myös riippuvuuden, jota kutsutaan Ampèren laiksi. Ampèren laki voidaan johtaa Biot–Savartin laista.

Kirjoitetaan yhtälö (30.1) $B = \mu_0 I / 2\pi R$ muotoon

$$B\,(2\pi R) \;=\; \mu_0 I\,,$$

jossa $2\pi R$ voidaan tulkita r-säteisen ympyrän kehän pituudeksi virtajohdinta I kiertävää magneettikentän (vuon tiheyden) $\mathbf{B}$ kenttäviivaa pitkin. Ampère yleisti tämän muotoon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} \;=\; \mu_0\, I\,, \qquad (30.11a)$$

missä integrointi tehdään minkä tahansa suljetun silmukan yli, jonka virta I lävistää. Tämä on Ampèren laki, joka pätee tasavirroille.

Tavallisimmin tämä Ampèren laki (tai Ampèren kiertämälaki) kirjoitetaan magneettikentän voimakkuuden $\mathbf{H}$ avulla muotoon

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} \;=\; I\,. \qquad (30.11b)$$

(Tyhjiössä siis $\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}$, ks. kappale 29.1, s. 86)

Jos magneettikentällä ja integrointitiellä on riittävästi symmetriaa, voidaan Ampèren lakia käyttää virran aiheuttaman magneettikentän määräämiseen, samalla tavalla kuin Gaussin lakia käytetään sähkökentän määräämiseen.

Esim. 30.5: Pitkässä suorassa johtimessa (poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on R) kulkee virta I_0 tasanjakautuneena johtimen poikkileikkauksen yli. Määrää magneettivuon tiheys sekä johtimen sisä- että ulkopuolella.

Esim. 30.6: Ideaalisessa pitkässä solenoidissa on n kierrosta/pituusyksikkö ja virta I. Laske magneettivuon tiheys solenoidin sisällä.

Toroidi

Toroidiksi sanotaan (munkkirinkilän tavoin) ympyräksi muotoiltua solenoidia. Toroidin koko magneettikenttä on "rinkilän" sisällä.

Esim. 30.7: Toroidissa, jonka säde on r, on N kierrosta ja virta I. Laske sen magneettivuon tiheys.

Esim. 30.8: Määrää nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan varauksen q aiheuttama magneettivuon tiheys. Mikä on kahden samaan suuntaan rinnakkain etäisyydellä d liikkuvan varauksen välinen voima?

31. SÄHKÖMAGNEETTINEN INDUKTIO

Pääkohdat:

1. Indusoitu jännite (smv)
2. Faradayn laki ja Lenzin laki
3. Generaattorin toiminta

Kun Ørsted oli keksinyt sähköisten ilmiöiden aiheuttaman magnetismin v. 1820, ehdotti Michael Faraday v. 1821, että myös käänteistä ilmiötä olisi syytä etsiä. Vuonna 1830 Joseph Henry ja vuotta myöhemmin riippumattomasti myös Faraday löysivätkin muuttuvan magneettikentän kelaan indusoiman sähkövirran.

31.1. Sähkömagneettinen induktio

Magneettikentän muutos voi tapahtua johtimen kannalta ajan tai paikan suhteen. Kokeellisesti voidaan todeta, että virtasilmukkaan indusoituu sähkövirta seuraavissa tapauksissa.

(i) Magneettikentän voimakkuus muuttuu

• paikan suhteen

• tai ajan suhteen

(ii) Virtasilmukan pinta-ala muuttuu

(iii) Virtasilmukan asento muuttuu

31.2. Magneettivuo

Samoin kuin luvussa 24 määriteltiin sähkökentän vuo Φ_E, määritellään nyt magneettivuo homogeeniselle kentälle

$$\Phi_B = B\,A\cos\theta = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (31.1)$$

tasopinnan $\mathbf{A}$ läpi ja epähomogeenisen ja/tai ei-tasopinnan läpi

$$\Phi_B = \int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}. \qquad (31.2)$$

Magneettivuo on verrannollinen vuon tiheyttä kuvaavien kenttäviivojen lukumäärään.

31.3. Faradayn laki ja Lenzin laki

Faradayn lain mukaan

suljettuun virtasilmukkaan indusoitu jännite (smv) on verrannollinen silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutokseen

eli

$$\mathcal{E} \propto \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (31.3)$$

Koska $\Phi = B\,A\cos\theta$, niin

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} A\cos\theta + B\frac{dA}{dt}\cos\theta - B\,A\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

missä saadut kolme termiä vastaavat kappaleen 31.1 tapauksia (i) – (iii).

Lenzin laki

Lenzin laki antaa indusoituneen jännitteen suunnan (eli merkin). Se voidaan lausua seuraavasti:

Indusoidun jännitteen suunta on sellainen, että se pyrkii vastustamaan induktion aiheuttavaa magneettivuon muutosta.

Tämä on seurausta energian säilymislaista.

Määritellään pinta-alavektorin $\mathbf{A}$ suunta oikean käden säännöllä positiivisen kiertosuunnan suhteen. Tällöin voidaan Faradayn ja Lenzin lait yhdistettynä kirjoittaa muotoon

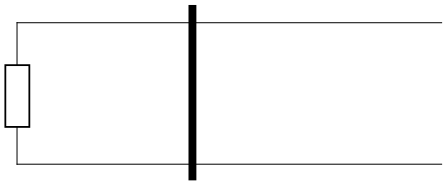
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (31.4)$$

tai mikäli tarkastellaan kelaa, jossa on N kierrosta

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (31.5)$$

Esim. 31.2: Solenoidissa, jonka säde on 2 cm, on 10 kierrosta/cm ja se on asetettu kelaan, jonka säde on 4 cm ja jossa on 15 kierrosta. Mikä on kelaan indusoitunut jännite, kun solenoidin virta muuttuu 1 A ajassa 0.05 s?

Esim. 31.1: Metallitanko liukuu nopeudella v kohtisuoraan magneettikenttää vastaan koskettaen virtasilmukan johtimia kuvan mukaisesti. Määrää silmukan virta, vastuksen teho ja tangon liikuttamiseen tarvittava teho.



31.4. Generaattorit

Generaattorilla voidaan muuttaa mekaanista energiaa sähköenergiaksi. Kun oheisen kuvan mukaisessa järjestelyssä kelaa pyöritetään kulmanopeudella ω, niin magneettivuo kelan läpi on $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = B\,A \cos \omega t$. Jos kelassa on N kierrosta, on indusoitunut jännite

$$\mathcal{E} = -N\,d\Phi/dt = N\,B\,A\,\omega \sin \omega t$$

eli

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \qquad (31.6)$$

Tämä on vaihtojännite, jonka amplitudi on

$$\mathcal{E}_0 = N\,B\,A\,\omega. \qquad (31.7)$$

Tasasuuntaamalla, esim. mekaanisesti kommutaattorilla, saadaan jännite, jonka napaisuus ei vaihtele.

32. INDUKTANSSI JA MAGNEETTISET AINEET

Pääkohdat:

1. Induktanssi ja itseinduktanssi
2. LR-virtapiirit
3. Magneettikentän energia
4. LC- ja RLC-virtapiirien oskillointi
5. Ferromagnetismi, paramagnetismi ja diamagnetismi

Edellisen luvun alussa esitetyssä Henryn (ja Faradayn) kokeessa primäärikäämin virran aiheuttama magneettivuon muutos indusoi jännitteen sekundäärikäämiin. Tätä sanotaan kyseisten virtapiirien (tai ko. kelojen) keskinäisinduktioksi. Kelan synnyttämän magneettivuon muutos indusoi jännitteen myös kelaan itseensä. Tätä kutsutaan itseinduktioksi.

32.1. Induktanssi

Tarkastellaan oheista virtapiiriä, johon kytketään virta hetkellä t_0. Vaihtokytkimen asennossa a) virta saa maksimiarvonsa heti, mutta asennossa b) itseinduktiosta johtuen viiveellä.

Oman vuonsa vuoksi kelaan indusoitunut jännite on

$$\mathcal{E} = -N\, d\Phi/dt, \qquad (32.1)$$

joka siis aiheuttaa viiveen virran I kasvuuun. Indusoituneen jännitteen napaisuus on sellainen, että se vastustaa virran muutosta.

Tarkastellaan seuraavaksi oheista kelaa 1 (N_1), jossa kokonaisvuo

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \qquad (32.2)$$

on summa omasta Φ_{11} ja kelan 2 (N_2) vuosta Φ_{12}. Tällöin kelaan 1 indusoituva jännite on

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\, d/dt\, (\Phi_{11} + \Phi_{12}).$$

Itseinduktanssi

Jos magneettisia aineita ei ole läsnä, kelan synnyttämä vuo on verrannollinen sen virtaan ja voidaan kirjoittaa

$$N_1\, \Phi_{11} = L_1\, I_1, \qquad (32.3)$$

missä verrannollisuuskerroin L_1 on kelan itseinduktanssi. Tällöin

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1\, dI_1/dt. \qquad (32.4)$$

Itseinduktanssi riippuu kelan koosta ja muodosta sekä johdinkierrosten lukumäärästä. Itseinduktanssin SI-yksikkö on henry, $1\ H = Vs/A = Wb/A$.

Keskinäisinduktanssi

Samoin voidaan kirjoittaa kelan 2 synnyttämälle vuolle kelaan 1

$$N_1\, \Phi_{12} = M\, I_2, \qquad (32.5)$$

missä M on kelojen 1 ja 2 keskinäisinduktanssi. Voidaan osoittaa, että $M_{12} = M_{21} = M$. Siten virran I_2 indusoima jännite kelaan 1 on

$$\mathcal{E}_{12} = -M\, dI_2/dt. \qquad (32.6)$$

Kelojen keskinäisinduktanssi riippuu, paitsi molempien kelojen ominaisuuksista erikseen, myös kelojen keskinäisestä etäisyydestä ja asennosta. Myös keskinäisinduktanssin yksikkö on henry.

Esim. 32.1: Pitkän solenoidin pituus on ℓ, poikkileikkauksen pinta-ala A ja siinä on N kierrosta. Mikä on sen itseinduktanssi?

32.2. LR-virtapiirit

Määrätään seuraavaksi virta $I = I(t)$ oheisessa piirissä kytkennän K_1 ($t = 0$) jälkeen. Kirchhoffin silmukkasäännön mukaan

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0\,, \qquad (32.7)$$

mikä voidaan ratkaista esim. sijoituksella $y = \mathcal{E}/R - I$. Ratkaisu on

$$I = I_\infty\,(\,1 - e^{-t/\tau}\,), \qquad (32.8)$$

missä $I_\infty = \mathcal{E}/R$ ja

$$\tau = L/R \qquad (32.9)$$

on eksponentiaalisen aikariippuvuuden aikavakio.

Totea ratkaisu

Tarkastellaan seuraavaksi virtaa, kun em. piiriin lisätään kytkin K_2, joka kytketään samalla hetkellä ($t = 0$), kun K_1 avataan. Tällöin

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0\,,$$

josta saadaan

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\,,$$

kun $\tau = L/R$. Siten

$$I = I_0\,e^{-t/\tau}. \qquad (32.10)$$

Vertaa tulosta kondensaattorin varaamiseen ja purkamiseen RC-piirissä, kappaleessa 28.4, jolloin siis $\tau = RC$.

32.3. Kelaan varastoitunut energia

Tarkastellaan edellisen kappaleen mukaista virran kasvua LR-piirissä, yht. (32.7), josta

$$\mathcal{E} = IR + L\frac{dI}{dt}\,. \qquad (32.11)$$

Jännitelähteen teho on

$$\mathcal{E}I = I^2R + L\,I\frac{dI}{dt}\,,$$

missä jälkimmäinen termi on kelan ottamaa tehoa

$$\frac{dU_L}{dt} = L\,I\frac{dI}{dt}\,.$$

Niinpä kelaan varastoitunut energia on $U_L = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{1}{2}L\,I^2$ eli

$$U_L = 1/2\,L\,I^2. \qquad (32.12)$$

Tätä voidaan jälleen verrata kondensaattoriin varastoituneeseen energiaan $U_C = 1/2\,Q^2/C$.

Magneettikentän energiatiheys

Kelaan varastoituneen energian voidaan katsoa olevan sen magneettikentässä. Tarkastellaan solenoidia, jolle $B = \mu_0 n I$ ja esimerkissä 32.1 saatiin induktanssiksi $L = \mu_0 n^2 A \ell$. Koska siten $I = B / \mu_0 n$, saadaan

$$U = 1/2\, L I^2 = 1/2\, \mu_0 n^2 A \ell\, (B / \mu_0 n)^2 = A\ell\, B^2 / 2\mu_0.$$

Nyt $A\ell$ on solenoidin tilavuus, joten solenoidin magneettikentän energia tilavuusyksikköä kohti on $U / A\ell$ eli

$$u_B = 1/2\, B^2 / \mu_0. \qquad (32.13)$$

Tämä on magneettikentän energiatiheys yleisemminkin. Vertaa sähkökentän energiatiheyden lausekkeeseen $u_E = 1/2\, \varepsilon_0 E^2$.

32.4. Vapaasti värähtelevä LC-piiri

Oheisen piirin kondensaattori on aluksi varattu, $Q_0 = C V_0$ ja $U_E = Q_0^2 / 2C$. Kytkennän jälkeen virta I: $0 \rightarrow I_0 = I_{max}$ purkaa kondensaattorin varauksen ja siirtää energian kelaan, $I_0 = B_0 / \mu_0 n$ ja $U_B = 1/2\, L I_0^2$. Tämän jälkeen virta I varaa taas kondensaattorin, nyt vastakkaiseen jännitteeseen, $-Q_0 = -C V_0$ ja $U_E = Q_0^2 / 2C$, jonka jälkeen sama toistuu virran kulkiessa vastakkaiseen suuntaan.

Edellä kuvattu tapahtumasarja voidaan ratkaista täsmällisesti soveltamalla kytkentään Kirchhoffin silmukkasääntöä, josta

$$Q/C - L\, dI/dt = 0.$$

koska $I = -dQ/dt$, on $dI/dt = -d^2Q/dt^2$ ja saadaan

$$d^2Q/dt^2 + (1/LC)\, Q = 0.$$

Kun merkitään

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (32.14)$$

ns. LC-piirin ominaiskulmataajuus, voidaan differentiaaliyhtälön ratkaisu kirjoittaa muodossa

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t. \qquad (32.15)$$

Totea:

Piirin virta on $I = -dQ/dt = \omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$, joten

$$I = I_0 \sin \omega_0 t, \qquad (32.16)$$

missä $I_0 = \omega_0 Q_0$.

Koska $I_0^2 = \omega_0^2 Q_0^2 = Q_0^2 / LC$, piirin kokonaisenergia on

$$\begin{aligned} U &= U_E + U_B = 1/2\, Q^2 / C + 1/2\, L I^2 \\ &= 1/2\, Q_0^2/C\, \cos^2 \omega_0 t + 1/2\, L I_0^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &= 1/2\, Q_0^2/C\, (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = 1/2\, Q_0^2/C = 1/2\, L I_0^2, \end{aligned}$$

joka on ajasta riippumaton.

Vertaa harmoniseen oskillaattoriin!

32.5. LC-piirin vaimenevat värähtelyt

Todellisuudessa LC-piirin värähtelyt aina vaimenevat, koska piirin energiaa kuluu ohmisiin vastuksiin sekä säteilee pois sähkömagneettisena säteilynä.

Kun LC-piirissä on resistanssi R Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan

$$\frac{Q}{C} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

ja

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0\,. \qquad (32.17)$$

Ratkaisu käyttäytyy samoin kuin vaimenevan harmonisen oskillaattorin ratkaisu.

32.6. Aineiden magneettiset ominaisuudet

Aineet jaetaan niiden magneettisten ominaisuuksiensa perusteella kolmeen ryhmään: **ferromagneettiset** (esim. Fe, Ni, Co, CrO_2, Fe_3O_4, ...), **paramagneettiset** (esim. Al, Cr, K, ...) ja **diamagneettiset** (esim. Cu, C, Ag, Au, Pb, ...). Niiden kokemat voimavaikutukset epähomogeenisessa magneettikentässä ovat erilaiset.

Ulkoisessa magneettikentässä B_0 aineen magneettikenttä on

$$B = B_0 + B_M = (1+\chi_m)\,B_0 = \kappa_m\,B_0\,, \qquad (32.22)$$

missä χ_m on ko. aineen magneettinen suskeptibiliteetti ja κ_m on suhteellinen permeabiliteetti (merk. myös μ_r).

Atomaariset momentit

Aineiden magneettiset ominaisuudet perustuvat elektronien rataliikkeen (orbitaalien) aiheuttamiin magneettisiin momentteihin atomeissa sekä elektronien spiniin liittyviin magneettisiin momentteihin. Esimerkissä 29.6 sivulla 89 todettiin, että vetyatomin klassillisessa mallissa $\mu = eL/2m$ $(= \mu_B)$, missä L on rataliikkeen liikemäärämomentti. Kvanttimekaniikan mukaan atomeissa elektronin rataliikkeeseen liittyvä $\mu = \ell\,\mu_B;\ \ell = 0, 1, 2, ...$; missä Bohrin magnetoni

$$\mu_B = e\backslash\ /\ 2m \qquad (32.23)$$

ja edelleen elektronin spiniin liittyvä $\mu = \mu_B$.

Nämä alkeismomentit voivat esiintyä siten, että atomeilla on magneettinen momentti tai pareittain siten, että atomeilla ei ole nettomomenttia.

Diamagnetismi on seurausta aineeseen indusoituneista magneettisista momenteista, jotka Lenzin lain mukaan pyrkivät pienentämään ulkoista magneettikenttää, $\chi_m \approx -10^{-5} < 0$. Kaikissa aineissa esiintyy diamagnetismia, joskin se peittyy mahdollisen para- tai ferromagnetismin alle. Suprajohteet ovat täydellisiä "diamagneetteja", $\chi = -1$ ja $B = 0$.

Paramagnetismi on seurausta aineen atomien tai molekyylien pysyvistä magneettisista momenteista. Ne orientoituvat kentän suuntaan sitä vahvistaen, $\chi_m \approx 10^{-5} > 0$. Koska lämpöliike vähentää (sekoittaa) alkeismagneettien orientoitumista, on paramagnetismi lämpötilasta riippuvaa.

Ferromagnetismi aiheutuu atomaarisista magneettisista momenteista, jotka pyrkivät järjestymään spontaanisti. Järjestys esiintyy alueissa, joiden koko on millimetrien luokkaa. Ferromagneettisen aineen magneettikentässä esiintyy ns. hystereesistä eli jäännösmagnetismia, joka aiheutuu em. makroskooppisten alueiden järjestyksen "hitaasta" muuttumisesta ulkoisen kentän muuttuessa.

Kestomagneetit ovat seurausta hysteresiksestä.

33. VAIHTOVIRTAPIIRIT

Pääkohdat:

1. Virran, jännitteen ja tehon hetkelliset, huippu- ja teholliset arvot
2. Virran ja jännitteen vaihe-ero
3. RLC-piirit
4. Muuntaja

Tasavirtaa merkitään tavallisesti DC (Direct Current) ja vaihtovirtaa AC (Alternating Current). Vaihtovirran suunta vaihtelee jaksollisesti ja yleensä sini-funktion mukaisesti. Sähköenergian siirrossa käytetään yleensä vaihtovirtaa ja useimmat sähkölaitteet toimivat vaihtovirralla.

33.1. Käsitteitä ja merkintöjä

Käytetään seuraavassa pieniä kirjaimia virtapiirin virran ja jännitteen hetkellisille arvoille

$$i = i_0 \sin \omega t \tag{33.1}$$

ja

$$v = v_0 \sin (\omega t + \phi), \tag{33.2}$$

missä amplitudit i_0 ja v_0 ovat ns. huippuarvoja ja ϕ on virran ja jännitteen vaihe-ero. Mikäli vaihe-ero $\phi = 0$, sanotaan, että piirin virta ja jännite ovat samassa vaiheessa, jolloin ne saavat hetkellisen huippuarvonsa samanaikaisesti. Näin ei yleisesti ole.

Vaihtojännitelähdettä merkitään eikä vaihtovirtaa osoittavan nuolen suunnalla ole yleensä merkitystä.

33.2. Resistanssi AC-piirissä ja teholliset arvot

Resistanssin virta ja jännite ovat samassa vaiheessa,

$$v_R = v_{0R} \sin \omega t, \qquad (33.3)$$

missä

$$v_{0R} = i_0 R, \qquad (33.4)$$

ja hetkellinen teho on

$$p = i^2 R = i_0^2 R \sin^2 \omega t.$$

Keskimääräinen teho on

$$P = p_{av} = 1/T \int_T p \, dt = R \, i_0^2 \, 1/T \int_T \sin^2 \omega t \, dt = R \, (i^2)_{av} = R \, I^2.$$

Koska $1/T \int_T \sin^2 \omega t \, dt$
$= 1/2 - 1/2T \int_T \cos 2\omega t \, dt$
$= 1/2$,
seuraa $(i^2)_{av} = 1/2 \, i_0^2$ ja virran ns. tehollinen arvo eli rms-arvo (root mean square) on

$$I = \sqrt{(i^2)_{av}} = i_0 / \sqrt{2} \approx 0.707 \, i_0. \qquad (33.5a)$$

Vastaavasti jännitteen tehollinen arvo I R on

$$V = \sqrt{(v^2)_{av}} = v_0 / \sqrt{2} \approx 0.707 \, v_0 \qquad (33.5b)$$

ja

$$V_R = I R \qquad (33.6)$$

sekä keskimääräinen teho (rms-teho)

$$P_R = I^2 R = V^2 / R. \qquad (33.7)$$

Esim. 33.1: Mitkä ovat jännitteen ja virran huippuarvot tavallisessa 100 W hehkulampussa 220 V verkkojännitteessä?

33.3. Kela vaihtovirtapiirissä

Kun piirin virta on $i = i_0 \sin \omega t$, on jännite $v_L = L \, di/dt = L \, i_0 \, \omega \cos \omega t$ eli

$$v_L = L \, di/dt = v_{0L} \cos \omega t, \qquad (33.8)$$

missä

$$v_{0L} = i_0 \, \omega \, L. \qquad (33.9)$$

Jännite voidaan kirjoittaa
$v_L = v_{0L} \cos \omega t$
$= v_{0L} \sin (\omega t + 90°)$,
joten jännite on 90° eli $\pi/2$ virtaa edellä. Virran ja jännitteen huippu- ja tehollisille arvoille voidaan kirjoittaa

$$v_{0L} = i_0 \, X_L \text{ ja } V_L = I \, X_L, \qquad (33.10)$$

missä

$$X_L = \omega \, L \qquad (33.11)$$

on kelan reaktanssi. Reaktanssin SI-yksikkö on ohmi.

Kelan reaktanssi siis "toimii resistanssin tavoin vastustaen" vaihtovirran kulkua. Kelan reaktanssi on suoraan verrannollinen vaihtovirran taajuuteen ja sen hetkellinen teho on

$$p = i \, v_L = i_0 \, v_{0L} \sin \omega t \cos \omega t \, ,$$

mutta jakson yli keskimääräistettynä teho häviää

$$P = p_{av} = 0.$$

33.4. Kondensaattori vaihtovirtapiirissä

Kondensaattorin varaus $q = \int i\,dt$
$= \int i_0 \sin \omega t\,dt = -i_0/\omega \cos \omega t + \text{vakio}$ eli

$$q = -i_0/\omega \cos \omega t\,, \qquad (33.12)$$

kun vakio valitaan nollaksi. Koska kondensaattorin jännite $v_C = q/C$, niin

$$v_C = -i_0/\omega C \cos \omega t = -v_{0C} \cos \omega t$$

eli jännitteen huippuarvo on

$$v_{0C} = i_0\, 1/\omega C. \qquad (33.13)$$

Nyt $v_C = -v_{0C} \cos \omega t =$
$= v_{0C} \sin(\omega t - 90°)$ eli jännite on nyt $90°$ virtaa jäljessä.

Samoin kuin kelalle voidaan myös kondensaattorillekin kirjoittaa

$$v_{0C} = i_0 X_C \text{ ja } V_C = I X_C, \qquad (33.14)$$

missä kondensaattorin reaktanssi on

$$X_C = 1 / \omega C. \qquad (33.15)$$

Kondensaattorin reaktanssi on kääntäen verrannollinen taajuuteen. Myös kondensaattorin ottama teho on keskimäärin nolla.

33.5. Vektoridiagrammit (ja kompleksilukuesitykset)

Vaihtovirtapiirin virtojen ja jännitteiden huippuarvoja voidaan kuvata vektoreilla (tai kompleksiluvuilla), jotka pyörivät origon ympäri kulmataajuudella ω ja muodostavat kulman $\omega t + \phi$ positiivisen x-akselin kanssa. Tällöin vektoreiden y-komponentit antavat virtojen ja jännitteiden hetkelliset arvot.

33.6. RLC-sarjapiirit

RLC-sarjapiirin kaikkien komponenttien virta on sama ja jännitteille $v - v_R - v_C - v_L = 0$. Jännitteen hetkellinen arvo saadaan vektoridiagrammista, jossa $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{0R} + \mathbf{v}_{0C} + \mathbf{v}_{0L}$. Vektorien yhteenlaskusääntöjen avulla

$$v_0^2 = v_{0R}^2 + (v_{0L} - v_{0C})^2$$
$$= i_0^2 [\, R^2 + (X_L - X_C)^2 \,]$$
$$= i_0^2 Z^2 .$$

Siten voidaan kirjoittaa

$$v_0 = i_0 Z \text{ ja } V = I Z, \qquad (33.16)$$

missä

$$Z = \sqrt{[\, R^2 + (X_L - X_C)^2 \,]} \qquad (33.17)$$

on piirin impedanssi.

Koska $\mathbf{v}_{0R}$ ja $\mathbf{i}_0$ ovat aina samansuuntaisia, $\mathbf{v}_0$- ja $\mathbf{i}_0$-vektoreiden välinen vaihe-erolle ϕ on voimassa

$$\tan\phi = (X_L - X_C) / R \,. \qquad (33.18)$$

33.7. RLC-sarjapiirin resonanssi

RLC-sarjapiirin virta on siis

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \,,$$

joka taajuuden muuttuessa saa maksimiarvonsa, kun $X_L = X_C$ eli $\omega L = 1 / \omega C$. Tämä, ns. resonanssitaajuus on siten

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \,, \qquad (33.19)$$

joka on sama kuin aikaisemmin todettu LC-piirin ominaistaajuus. Virran maksimiarvoksi resonanssitaajuudella tulee

$$I_{max} = V / R. \qquad (33.20)$$

33.8. Vaihtovirtapiirin ottama teho

Vaihtovirtapiirin hetkellinen teho on

$$p = i\,v = i_0\,v_0 \sin\omega t \, \sin(\omega t + \phi)$$

$$= i_0\,v_0 \, [\, \sin^2\omega t \, \cos\phi + \sin\omega t \, \cos\omega t \, \sin\phi \,] \,,$$

jonka keskiarvo jakson yli on

$$P = p_{av} = i_0\,v_0 \, [\, 1/2 \times \cos\phi + 0 \times \sin\phi \,]$$

$$= 1/2 \; i_0\,v_0 \cos\phi,$$

missä ϕ on jännitteen ja virran välinen vaihe-ero.

Koska $1/2 \; i_0\,v_0 = (i_0 / \sqrt{2}) \times (v_0 / \sqrt{2}) = I\,V$ ja vektoridiagrammin mukaan $v_0 \cos\phi = v_{0R} = i_0 R$, saadaan ns. pätöteho

$$P = I\,V \cos\phi = I^2 R. \qquad (33.21)$$

Termi $\cos\phi$ on nimeltään tehokerroin. Pätöteho $P = I^2 R = (V/Z)^2 R$ voidaan kirjoittaa vielä muotoon

$$P = \frac{V^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \,. \qquad (33.22)$$

33.9. Muuntaja

Muuntajalla voidaan muuttaa vaihtovirran jännitettä. Koska $\mathcal{E}_1 = -N_1 \, d\Phi/dt$ ja $\mathcal{E}_2 = -N_2 \, d\Phi/dt$, niin

$$\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_2 = N_1 / N_2 \,. \qquad (33.23)$$

Mikäli sekundääripiiriä ei kuormiteta, on primääripiirissä $\cos\phi = 0$, eikä primääripiiri ota tehoa.

34. MAXWELLIN YHTÄLÖT JA SÄHKÖMAGNEETTISET AALLOT

Pääkohdat:

1. Maxwellin yhtälöt
2. Sähkömagneettiset aallot

Faraday oli huomannut jo v. 1845, että magneettikenttä vaikuttaa lasissa etenevään valoon, ja oletti sen vuoksi valossa olevan "sähköisiä ja magneettisia" värähtelyjä. Koska suureen $1 / (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ oli havaittu olevan suuruudeltaan mitatun valonnopeuden luokkaa, päätti James Clerk Maxwell tutkia Faradayn hypoteesia tarkemmin ja hän päätyikin lopulta v. 1865 ennustamaan sähkömagneettisten aaltojen olemassa olon ns. Maxwellin yhtälöiden pohjalta.

Oleellisilta osin nämä yhtälöt ovat jo aikaisemmin tällä kurssilla esiintyneitä yhtälöitä tai ilmiöitä sopivasti yleistettynä (24.3), (31.2), (31.3) ja (30.11):

Gauss
$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int \rho \, \mathrm{d}\mathbf{r} = Q \qquad (34.3)$$

Gauss
$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \qquad (34.4)$$

Faraday
$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \qquad (34.5)$$

Ampere–Maxwell
$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \qquad (34.6)$$

Maxwellin omaa uutta osuutta yhtälöissä on siirtymävirran $\partial \mathbf{D}/\partial t$ lisääminen viimeiseen yhtälöistä. Siten yhtälöt ovat symmetriset sähkö- ja magneettikenttien suhteen lukuunottamatta sitä, että magneettisia varauksia ja niiden virtoja ei esiinny.

Maxwellin yhtälöt voidaan esittää myös differentiaalimuodossa:

Gauss
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (34.3b)$$

Gauss
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (34.4b)$$

Faraday
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (34.5b)$$

Ampere–Maxwell
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (34.6b)$$

Kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä voidaan helposti johtaa sähkömagneettisten aaltojen yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (34.7b)$$

josta etenevän aallon nopeudeksi saadaan

$$c = 1 / (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} = 3.00 \times 10^8 \ \mathrm{ms}^{-1}. \qquad (34.9)$$

Tämä on valonnopeus.

Heinrich Hertz onnistui v. 1887 tuottamaan ja havaitsemaan Maxwellin ennustamat aallot laboratorio-olosuhteissa.