Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö

Kevät 2017

Geometria

Luennot: **Kerkko Luosto**
Muistiinpanot: **Jesse Railo (2013) sekä**
Jussi Klemetti ja Manu Harsu (2017)

2 Affiinia geometriaa

Affiini geometria on se osa geometriasta, jonka pystyy rakentamaan suoran käsitteen varaan. Oleellista on, että käsittelyn ulkopuolelle jäävät sellaiset mittaamista vaativat asiat kuin etäisyys ja kulmien suuruudet. Affiinia geometriaa pystyisi kehittelemään myös aksiomaattisesti, mutta kun luentojen tässä osassa on tarkoitus käsitellä geometrian malleja, affiinin geometrian tarkastelu tullaan tekemään vektoriavararuuksissa.

Näissä luennoissa kehitellään ensin affiinia geometriaa aivan puhtaasti suoran käsitteestä lähtien; toinen lähestymistapa aiheeseen olisi, että affiiniin geometriaan kuuluvat ne asiat, jotka säilyvät affiineissa kuvauksissa. Näihin affiineihin kuvauksiin paneudutaan sen jälkeen, kun ensin on pintapuolisesti opittu ymmärtämään suorien ja tasojen yleistystä, affiineja aliavaruuksia ja niiden dimensioteoriaa. Affiinit kuvaukset paljastavat myös, miten tiukasti affiini geometria on sidoksissa välissäolon käsitteeseen.

Määritelmä 2.1. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. A on V:n *affiini aliavaruus*, jos $A \neq \emptyset$ ja A sisältää kaikkien pisteapariensa yhdyssuorat, ts. kaikilla $x, y \in A$, $x \neq y$ pätee

$$\ell(x, y) = \{\, tx + (1 - t)y \mid t \in \mathbb{R} \,\} \subseteq A.$$

Tässä esiintyvää joukkoa $\ell(x, y)$ kutsutaan pisteiden x ja y *kautta kulkevaksi suoraksi.*

Määritelmä 2.2. Olkoon V reaalinen aliavaruus ja $S \subseteq V$. Joukon S vektoreiden *affiinilla kombinaatiolla* tarkoitetaan lineaarikombinaatioita

$$\sum_{s \in S_0} \lambda_s s, \text{ missä } S_0 \subseteq S \text{ on äärellinen ja } \sum_{s \in S_0} \lambda_s = 1.$$

Affiineja aliavaruuksia on hyödyllistä verrata kuperiin joukkoihin: muodollisesti määritelmät ovat samankaltaisia, mutta itse asiassa kuperuus on paljon yleisempi käsite kuin aliavaruuden affiinius.

Määritelmä 2.3. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a) Joukko $K \subseteq V$ on V:n *kupera* osajoukko, jos K sisältää kaikkien pisteapariensa yhdysjanat, ts. kaikilla $x, y \in K$, $x \neq y$ pätee

$$[x, y] = \{\, tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1] \,\} \subseteq K.$$

Joukkoa $[x, y]$ kutsutaan *janaksi*, jonka *päätepisteet* ovat a ja b. (Merkintä on mielekäs myös tapauksessa $x = y$, jolloin $[x, x] = \{x\}$, mutta tätä *surkastunutta janaa* ei pidetä janana.)

b) Joukon $S \subseteq V$ vektoreiden *kuperalla kombinaatiolla* tarkoitetaan lineaarikombinaatioita $\sum_{s \in S_0} \lambda_s s$, missä $S_0 \subseteq S$ on äärellinen, $\sum_{s \in S_0} \lambda_s = 1$ ja jokaisella $s \in S_0$ pätee $\lambda_s \geq 0$.

Affiinit kombinaatiot liittyvät luonnollisella tavalla affiineihin aliavaruuksiin ja kuperat kombinaatiot kuperiin joukkoihin.

Lemma 2.4. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Tällöin:*

a) Jos A on V:n affiini aliavaruus, niin A on suljettu affiinien kombinaatioiden suhteen, ts. kun $I \subseteq A$ on äärellinen ja $\lambda_v \in \mathbb{R}$, $v \in I$, missä $\sum_{v \in I} \lambda_v = 1$, niin $\sum_{v \in I} \lambda_v v \in A$.

b) Jos A on kupera, niin se on suljettu konveksien kombinaatioiden suhteen.

Todistus. HT □

Lause 2.5. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $\mathcal{A}$ epätyhjä perhe V:n affiineja aliavaruuksia. Tällöin joko $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ tai $\bigcap \mathcal{A}$ on affiini aliavaruus.*

Todistus. HT □

Lemma 2.6 (Suunnikaslemma). *Olkoon V reaalinen vektoriavasuus ja A sen affiini aliavaruus. Olkoot $a, b, c \in A$ ja $d \in V$. Jos $a + c = b + d$, niin $d \in A$.*

Todistus. Koska A on affiini ja $a, c \in A$, niin $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + c) \in A$. Oletuksesta $a + c = b + d$ seuraa siis $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(b + d) = \frac{1}{2}(a + c) \in A$. Koska $b, \frac{1}{2}(b + d) \in A$ ja A on affiini, niin $2 \cdot (\frac{1}{2}(b + d)) + (-1) \cdot b = (b + d) - b = d \in A$. □

Lemma 2.7. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja A sen affiini aliavaruus. Merkitään $U_0 = \{\, x - y \mid x, y \in A \,\}$. Olkoon $a \in A$ mielivaltainen. Tällöin jokaisella $v \in V$ pätee $v \in U_0$, jos ja vain jos $a + v \in A$.*

Todistus. Olkoot $a \in A$ ja $v \in V$. Jos $a + v \in A$, niin $a, a + v \in A$, joten $v = (a + v) - a \in U_0$.

Oletetaan kääntäen, että $v \in U_0$. Valitaan $x, y \in A$, joille $v = x - y$. Huomataan, että $a + x = y + (a + x - y) = y + (a + v)$ ja $a, x, y \in A$, joten suunnikaslemman nojalla $a + v \in A$. □

Lause 2.8. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

a) A on V:n affiini aliavaruus.

b) On olemassa $a \in A$ ja V:n vektorialiavaruus U, joille $A = a + U = \{\, a + x \mid x \in U \,\}$.

Itse asiassa kun A on affiini aliavaruus, niin U on yksikäsitteinen (jopa a:sta riippumaton) ja a:ksi voi valita minkä tahansa A:n pisteen.

Todistus. Osoitetaan ehdon riittävyys. Oletetaan siis, että $A = a + U$, missä $a \in A$ ja U on V:n vektorialiavaruus. Olkoot $b, c \in A$ ja $t \in \mathbb{R}$. Koska $A = a + U$, voidaan valita $u, v \in U$, joille

$$\begin{cases} b = a + u \\ c = a + v. \end{cases}$$

Saadaan $tb + (1-t)c = ta + tu + (1-t)a + (1-t)v = a + tu + (1-t)v$. Koska U on vektorialiavaruus, niin $tu + (1-t)v \in U$. Siis $tb + (1-t)c = a + \underbrace{tu + (1-t)v}_{\in U} \in a + U = A$. Koska tämä pitää paikkansa kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin $\ell(b, c) \subseteq A$. Siis kaikilla $b, c \in A$ pätee $\ell(b, c) \subseteq A$ eli A on affiini aliavaruus.

Osoitetaan sitten ehdon välttämättömyys. Oletetaan siksi, että A on affiini aliavaruus. Merkitään $U_0 = \{ x - y \mid x, y \in A \}$ ja kiinnitetään $a \in A$ mielivaltaisesti. Edellisen lemman nojalla $A = \{ a + v \mid v \in U_0 \} = a + U_0$. Osoitetaan, että U_0 on V:n vektorialiavaruus. Koska $\bar{0} = a - a \in U_0$, niin $U_0 \neq \emptyset$. Lisäksi

1) Olkoot $u, v \in U_0$. Edellisen lemman mukaan $a + u, a + v \in A$. Siis $a, a + u, a + v \in A$ ja $a + (a + u + v) = (a + u) + (a + v)$, joten suunnikaslemman 2.6 nojalla $a + u + v \in A$. Siis edellisen lemman nojalla $u + v \in U_0$.

2) Olkoot $u \in U_0$ ja $t \in \mathbb{R}$. Tiedetään, että $a+u \in A$. Koska $t(a+u)+(1-t)a = ta+tu+a-ta = a + tu$ ja A on affiini, niin $a + tu \in A$. Siis $tu \in U_0$. Siten U_0 on V:n vektorialiavaruus.

Siis U_0 on vektorialiavaruus, jolle $A = a + U_0$.

Tarkastetaan lisähuomautus: Oletetaan, että A on affiini aliavaruus, jolloin $A = a + U_0$. Oletetaan, että myös $A = b + U$, missä U on V:n vektorialiavaruus. Edellisen lemman nojalla pätee myös $A = b + U_0$, sillä tässä esityksessä voi valita affiinin aliavaruuden pisteen mielivaltaisesti. Siis $b + U_0 = A = b + U$, joten $U = U_0$. □

Määritelmä 2.9. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, A sen affiini aliavaruus ja U sen vektorialiavaruus. Jos $A = a + U$ jollakin $a \in U$, niin U:ta kutsutaan A:han *liittyväksi* tai A:ta *vastaavaksi vektorialiavaruudeksi* tai A:n *suunta-avaruudeksi*.

Seuraus 2.10. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Tällöin A on V:n vektorialiavaruus, jos ja vain jos A on V:n affiini aliavaruus ja $\mathbf{0} \in A$.*

Huomautus. Edellisen lauseen nojalla A:ta vastaava vektorialiavaruus on yksikäsitteinen.

Määritelmä 2.11. Olkoon A reaalisen vektoriavaruuden V affiini aliavaruus. Tällöin A:n *dimensio* on $\dim A = \dim U$, missä U on A:n suunta-avaruus. Jos $\dim A = 1$, niin A on *suora*. Jos $\dim A = 2$, niin A on *taso*. Jos V on n-ulotteinen, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja $\dim A = n - 1$, niin A:ta kutsutaan V:n *hypertasoksi*.

Lause 2.12. *Reaalisen vektoriavaruuden V suorat ovat täsmälleen joukot $\ell(a, b)$, missä a ja b ovat avaruuden V eri pisteitä.*

Todistus. Ensinnäkin yhdyssuorat $\ell(a,b)$, missä $a,b \in V$, $a \neq b$, ovat suoria, sillä

$$\begin{aligned}\ell(a,b) &= \{\, ta + (1-t)b \mid t \in \mathbb{R} \,\} = \{\, a + (t-1)a + (1-t)b \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, a + (1-t)(b-a) \mid t \in \mathbb{R} \,\} && \mid \tau = 1-t \\ &= \{\, a + \tau(b-a) \mid \tau \in \mathbb{R} \,\} = a + \{\, \tau(b-a) \mid \tau \in \mathbb{R} \,\} \\ &= a + \langle b-a \rangle.\end{aligned}$$

Siis $\ell(a,b)$ on affiini aliavaruus, jonka suunta-avaruus $\langle b-a \rangle$ on yksiulotteinen, joten $\ell(a,b)$ on suora.

Olkoon kääntäen ℓ avaruuden V suora. Koska suora on affiini aliavaruus, se on epätyhjä joukko. Valitaan $a \in \ell$ mielivaltaisesti. Lisäksi suoran ℓ suunta-avaruus U on yksiulotteinen, joten U ja ℓ ovat äärettömiä joukkoja. Voidaan siis valita toinen suoran ℓ piste b. Koska $b - a \in U$ ja $\dim(U) = 1$, niin $U = \langle b-a \rangle$. Siis

$$\ell = a + U = a + \langle b-a \rangle = \ell(a,b).$$ □

Lause 2.13. *Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiineja aliavaruuksia, joille $B \subsetneq A$. Tällöin* $\dim B < \dim A$.

Todistus. Koska B on affiini, niin $B \neq \emptyset$ ja on olemassa $b \in B \subseteq A$. Olkoon U A:n ja V B:n suunta-avaruus. Tällöin $A = b + U$ ja $B = b + V$. Koska $B \subsetneq A$ eli $b + V \subsetneq b + U$, niin $V \subsetneq U$. Lineaarialgebrasta tiedetään, että tällöin $\dim V < \dim U$ eli $\dim B < \dim A$, koska $\mathbb{R}^n$ on äärellisulotteinen. □

Siis tasoon aidosti sisältyvät affiinit aliavaruudet ovat yksiöitä tai suoria. Erityisesti kahden tason leikkaus on tyhjä tai niihin sisältyvä affiini aliavaruus, joten se on yksiö tai suora.

Esimerkki 2.14. Tarkastellaan $\mathbb{R}^4$:n tasoja

$$\begin{aligned}T &= \{\, (x,y,2,3) \mid x,y \in \mathbb{R} \,\} = (0,1,2,3) + T_0 \text{ ja} \\ U &= \{\, (0,1,z,t) \mid z,t \in \mathbb{R} \,\} = (0,1,2,3) + U_0.\end{aligned}$$

Näiden suunta-avaruudet ovat $T_0 = \{\, (x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \,\} = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0) \rangle$ ja $U_0 = \{\, \{(0,0,z,t) \mid z,t \in \mathbb{R}\} \,\} = \langle (0,0,1,0),(0,0,0,1) \rangle$.

Huomataan, että $T \cap U = \{(0,1,2,3)\}$, joten tasojen leikkaus voi olla yksiö. Tämä on ilmiö, johon ei ole totuttu, minkä selittää ilmeisesti se, että fyysinen avaruus on kolmiulotteinen.

Lause 2.15. *Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiineja aliavaruuksia, jotka leikkaavat eli $A \cap B \neq \emptyset$. Tällöin* $\dim(A \cap B) \geq \dim A + \dim B - n$.

Todistus. Valitaan $c \in A \cap B$. Olkoon U A:n ja V B:n suunta-avaruus, jolloin $A = c + U$ ja $B = c + V$. Havaitaan, että $A \cap B = (c+U) \cap (c+V) = c + (U \cap V)$. Sovelletaan kantalauseen vahvistettua versiota: jokainen vapaa joukko voidaan täyttää kannaksi. Valitaan $U \cap V$:lle kanta E_0. E_0 on vapaa U:ssa ja V:ssä, joten se voidaan täydentää toisaalta U:n kannaksi $E_A \supseteq E_0$ ja V:n kannaksi $E_B \supseteq E_0$. Voidaan osoittaa, että $E_A \cup E_B = E_A \cup (E_B \setminus E_0)$ on vapaa, joten $\mathbb{R}^n$:llä on kanta $E \supseteq E_A \cup \cup E_B$. Siis

$$n = \dim \mathbb{R}^n = |E| \geq |E_A \cup (E_B \setminus E_0)| = \dim A + \dim B - \dim A \cap B,$$

joten $\dim A \cap B \geq \dim A + \dim B - n$. □

Määritelmä 2.16. Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus. Tällöin kuvaus $f\colon A \to W$ on *affiini kuvaus*, jos kaikilla $x, y \in A$ ja $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$f\big(tx + (1-t)f(y)\big) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

Lemma 2.17. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia, $A \subseteq V$ ja $f\colon A \to W$ affiini kuvaus. Olkoot $a, b, c, d \in V$ pisteitä, joille $a + c = b + d$. Tällöin $f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$.*

Todistus. Koska f on affiini,

$$\begin{aligned} f(a) + f(c) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c)\right) = 2f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = 2f\left(\frac{1}{2}(a+c)\right) \\ &= 2f\left(\frac{1}{2}(b+d)\right) = 2f\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}f(b) + \frac{1}{2}f(d)\right) = f(b) + f(d). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.18. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A affiini V:n aliavaruus. Olkoot $f, g\colon A \to W$ affiineja kuvauksia, $b \in W$ ja $t \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $f + g\colon A \to W, (f+g)(x) = f(x) + g(x),$

b) $tf\colon A \to W, (tf)(x) = tf(x)$ *ja*

c) $h\colon A \to W, h(x) = b.$

ovat myös affiineja kuvauksia.

Todistus. HT □

Lemma 2.19. *Olkoot U, V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $f\colon A \to V$, $g\colon B \to W$ affiineja kuvauksia, missä A on U:n affiini aliavaruus ja B on V:n affiini aliavaruus. Oletetaan, että $f[A] \subseteq B$. Tällöin $g \circ f$ on affiini kuvaus $A \to W$.*

Todistus. Koska $f[A] \subseteq B$, niin $g \circ f\colon A \to W$. Olkoot $x, y \in A$, $t \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvauksien f ja g affiiniudesta seuraa

$$\begin{aligned} (g \circ f)(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) = g(tf(x) + (1-t)f(y)) \\ &= tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) = t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y), \end{aligned}$$

joten $g \circ f$ on affiini kuvaus. □

Lause 2.20. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$. Tällöin L on lineaarikuvaus, jos ja vain jos L on affiini kuvaus ja $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että L on lineaarikuvaus. Tiedetään, että $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Kun $x, y \in V$ ja $t \in \mathbb{R}$, niin

$$L(tx + (1-t)y) = L(tx) + L(1-t)y) = tL(x) + (1-t)L(y).$$

Siis lineaarikuvaus L on myös affiini kuvaus.

Oletetaan sitten kääntäen, että L on affiini kuvaus, jolle $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Olkoot $x, y \in V$. Tällöin lemman 2.17 nojalla

$$L(x+y) = L(x+y) + \mathbf{0} = L(x+y) + L(\mathbf{0}) = L(x) + L(y),$$

sillä $(x+y) + \mathbf{0} = x + y$. Olkoon edelleen $t \in \mathbb{R}$. Tällöin oletuksista seuraa

$$\begin{aligned} L(tx) &= L(tx + (1-t)\mathbf{0}) \\ &= tL(x) + (1-t)L(\mathbf{0}) = tL(x) + (1-t)\mathbf{0} = tL(x). \end{aligned}$$

Siis L on lineaarikuvaus. □

Lemma 2.21. *Olkoon $f\colon A \to W$ affiini kuvaus, missä A on reaalisen vektoriavaruuden V affiini aliavaruus. Merkitään U:lla A:n suunta-avaruutta, ja olkoon $a \in A$. Tällöin $L\colon U \to W$, $L(x) = f(a+x) - f(a)$ on lineaarikuvaus.*

Todistus. Sovelletaan edellistä lausetta: Ensiksi havaitaan, että $L(\mathbf{0}) = f(a+\mathbf{0}) - f(a) = \mathbf{0}$. Huomataan, että siirto $x \mapsto a+x$ on affiini kuvaus $U \to V$, joten $x \mapsto f(a+x)$ on affiini kuvaus $U \to W$ kahden affiinin kuvauksen yhdistettynä kuvauksena. Vakiokuvaus $x \mapsto -f(a)$ on myös affiini. Siis L on affiini kuvaus kahden affiinin kuvauksen summana. Koska edellisen lauseen ehto toteutuu, niin L on lineaarikuvaus. □

Lause 2.22. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus. Olkoon $f\colon A \to W$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

a) f on affiini kuvaus.

b) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ ja vakiovektori $b \in W$, joille $f(x) = L(x) + b$, kun $x \in A$.

Todistus. Todistetaan ensin ehdon riittävyys eli että kohdan b ehdosta seuraa kohta a. Olkoon siis $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus, $b \in W$ ja $f(x) = L(x) + b$, kun $x \in A$. Tällöin kaikille $x, y \in A$ ja $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= L(tx + (1-t)y) + b \\ &\overset{\text{(L lin.)}}{=} tL(x) + (1-t)L(y) + b \\ &= t(L(x) + b) + (1-t)(L(y) + b) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Siis f on affiini.

Oletetaan kääntäen, että f on affiini kuvaus ja U on A:n suunta-avaruus. Kiinnitetään $a \in A$, jolloin $A = a + U$. Edellisen lemman nojalla $L_0 : U \to W$, $L_0(x) = f(a+x) - f(a)$ on lineaarikuvaus. Lineaarialgebrasta tiedetään, että L_0 voidaan laajentaa lineaarikuvaukseksi $L\colon V \to W$, toisin sanoen $L \restriction U = L_0$. Kun $x \in A$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a + \underbrace{(x-a)}_{\in U}) - f(a) + f(a) \\ &= L_0(x-a) + f(a) \\ &= L(x-a) + f(a) \\ &= L(x) - L(a) + f(a) \\ &= L(x) + b, \text{ kun valitaan } b = f(a) - L(a). \end{aligned}$$

□

Seuraus 2.23. *Edellisen lauseen merkinnöillä: Affiini kuvaus $f\colon A \to W$ voidaan laajentaa affiiniksi kuvaukseksi $\tilde{f}\colon V \to W$.*

Todistus. Asetetaan $\tilde{f}\colon V \to W$, $\tilde{f}(x) = L(x) + b$, joka on affiini edellisen lauseen nojalla, kun lausetta sovelletaan $V:n$ epäaitoon aliavaruuteen V A:n sijasta. □

Lause 2.24. *Affiinit kuvaukset säilyttävät affiinit aliavaruudet: Olkoot V ja W reaalisia vektorialiavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus ja $f\colon A \to W$ affiini kuvaus. Tällöin $f[A]$ on W:n affiini aliavaruus.*

Todistus. Olkoot $L\colon V \to W$ ja $b \in W$ kuten edellisessä lauseessa. Kiinnitetään $a \in A$ mielivaltaisesti. Merkitään U:lla A:n suunta-avaruutta. Tällöin

$$f[A] = b + L[A] = b + L[a+U] = (b + L(a)) + L[U].$$

Koska U on V:n vektorialiavaruus ja L on lineaarinen, niin $L[U]$ on W:n vektorialiavaruus. Siis $f[A]$ on affiini aliavaruus ja $L[U]$ on sen suunta-avaruus. □

Määritelmä 2.25. Affiini kuvaus $f\colon A \to W$ on A:n ja $B = f[A]$:n välinen *affiini isomorfismi*, jos f on kuvauksena $f\colon A \to B$ bijektio (mihin riittää, että f on injektio). Tällöin sanotaan, että A ja B ovat *affiinisti isomorfiset*.

Lause 2.26. *Olkoon A reaalisen vektoriavaruuden V ja B reaalisen vektoriavaruuden W affiini aliavaruus. Tällöin A ja B ovat affiinisti isomorfiset, jos ja vain jos* $\dim A = \dim B$.

Todistus. Olkoon U A:n ja U' B:n suunta-avaruus, jolloin $A = a + U$ ja $B = b + U'$, missä $a \in A$ ja $b \in B$ voidaan kiinnittää mielivaltaisesti. Affiinin aliavaruuden dimension määritelmän mukaan $\dim A = \dim U$ ja $\dim B = \dim U'$.

Jos siis $\dim A = \dim B$, niin $\dim U = \dim U'$. Lineaarialgebrasta tiedetään, että tällöin $U \cong U'$, joten on olemassa lineaarinen isomorfismi $L\colon U \to U'$. Huomattakoon, että L on tietenkin myös affiini isomorfismi. Siirto $x \mapsto x - a$ on affiini isomorfismi $A = a + U \to U$ ja siirto $y \mapsto y + b$ on vastaavasti affiini isomorfismi $U' \to b + U' = B$. Siis $f\colon A \to B$, $f(x) = L(x - a) + b$ on affiinien isomorfismien yhdisteenä affiini isomorfismi. Siten A ja B ovat affiinisti isomorfiset.

Oletetaan kääntäen, että A ja B ovat affiinisti isomorfiset. Olkoon $f\colon A \to B$ affiini isomorfia. Lemman 2.21 nojalla kuvaus $L\colon U \to W$, $L(x) = f(a+x) - f(a)$, on lineaarikuvaus. Koska f on injektio, myös L on injektio. Edelleen

$$L[U] = -f(a) + f[a+U] = -f(a) + f[A] = -f(a) + B = -f(a) + (b + U') = (b - f(a)) + U' = U',$$

sillä $b, f(a) \in B \Rightarrow b - f(a) \in U'$. Siis $L\colon U \cong U'$. Tästä seuraa $\dim(U) = \dim(U')$ eli $\dim(A) = \dim(B)$. ☐

Määritelmä 2.27. Olkoot A ja B reaalisen vektoriavaruuden V affiineja aliavaruuksia. Affiinien aliavaruuksien A ja B sanotaan olevan *yhdensuuntaisia*, $A \parallel B$, jos niillä on sama suunta-avaruus.

Määritelmä 2.28. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Tällöin *piste $b \in V$ on pisteiden $a \in V$ ja $c \in V$ välissä*, jos on olemassa sellainen $t \in [0, 1]$, että $b = ta + (1 - t)c$ eli $b \in [a, c]$. Tätä merkitään $B(a, b, c)$.

Määritelmä 2.29. Olkoon A V:n affiini aliavaruus, W reaalinen vektoriavaruus ja $f\colon A \to W$. Sanotaan, että f *säilyttää välissäolorelaation*, jos kaikilla $a, b, c \in A$ ehdosta $B(a, b, c)$ seuraa $B(f(a), f(b), f(c))$. Kuvaus f *säilyttää välissäolorelaation vahvasti*, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

$$B(a, b, c) \Leftrightarrow B(f(a), f(b), f(c)).$$

Esimerkki 2.30. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säilyttää välissäolorelaation vahvasti, jos ja vain jos se on aidosti monotoninen.

Havainto: a, b, c ovat samalla suoralla, jos ja vain jos $B(a, b, c)$, $B(b, c, a)$ tai $B(c, a, b)$.

Lemma 2.31. *Olkoon A V:n affiini aliavaruus ja $a, b, c, d \in A$ eri pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.*

a) Jos $\ell(a, c) \cap \ell(b, d) \neq \emptyset$, niin a, b, c ja d ovat samassa tasossa.

b) Jos a, b, c ja d ovat samassa tasossa ja $\ell(a, b) \cap \ell(c, d) = \emptyset$, niin $\ell(a, b) \parallel \ell(c, d)$.

c) $a + c = b + d \Leftrightarrow \ell(a, b) \parallel \ell(c, d) \wedge \ell(b, c) \parallel \ell(a, d)$.

Todistus. a) HT.

b) Olkoon T taso, joka sisältää pisteet a, b, c ja d. Merkitään tason T suunta-avaruutta U:lla. Oletetaan, että $\ell(a, b) \cap \ell(c, d) = \emptyset$. Koska mitkään kolme pisteistä a, b, c ja d eivät samalla suoralla, niin erityisesti ne ovat eri pisteitä ja $b - a, d - c \in U$ eivät ole nollavektoreita. Oletetaan, että vastoin väitettä pätisi $\ell(a, b) \nparallel \ell(c, d)$. Tällöin myös $b - a \nparallel d - c$, joten pari $\{b - a, d - c\}$ on suunta-avaruuden U vapaa joukko. Koska T on taso, niin $\dim U = \dim T = 2$ ja $\{b-a, d-c\}$ on U:n kanta eli $U = \langle b-a, d-c\rangle$. Koska $c - a \in U$, niin vektorin $c-a$ voi kirjoittaa U:n kannan lineaarikombinaationa,ts. joillakin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pätee

$$c - a = \lambda(b-a) + \mu(c-d).$$

Siis $a + \lambda(b-a) = c + \mu(c-d) \in \ell(a,b) \cap \ell(c,d)$, mikä on vastoin oletusta.

c) Jos $a + c = b + d$, niin $c - d = b - a$, joten

$$\ell(a,b) = a + \langle b-a\rangle$$

ja

$$\ell(c,d) = c + \langle d-c\rangle = c + \langle c-d\rangle = c + \langle b-a\rangle.$$

Siis $\ell(a,b) \parallel \ell(c,d)$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} a + c = b + d &\Rightarrow a - d = b - c \\ &\Rightarrow \ell(a,d) \parallel \ell(b,c). \end{aligned}$$

Oletetaan kääntäen, että $\ell(a,b) \parallel \ell(c,d)$ ja $\ell(b,c) \parallel \ell(a,d)$. Koska $\ell(a,b) = a + \langle b - a\rangle$ ja $\ell(c,d) = c + \langle d-c\rangle$, niin on olemassa $\lambda \neq 0$, jolle $d - c = \lambda(b-a)$. Vastaavasti ehdosta $\ell(b,c) \parallel \ell(a,d)$ seuraa, että on olemassa $\mu \neq 0$, jolle $d - a = \mu(c-b)$. Merkitään $u = b - a$ ja $v = c - b$, jolloin $d - c = \lambda u$ ja $d - a = \mu v$. Koska mitkään kolme pisteistä a, b, c, d eivät ole samalla suoralla, pari $\{u, v\}$ on vapaa. Siis

$$\begin{aligned} &\begin{cases} c - a = (b-a) + (c-b) = u + v \\ c - a = (d-a) - (d-c) = -\lambda u + \mu v \end{cases} \\ &\Rightarrow u + v = -\lambda u + \mu v \\ &\Rightarrow \lambda = -1,\ \mu = 1 \\ &\Rightarrow d - a = c - b \\ &\Rightarrow \ a + c = b + d. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.32. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus , $f\colon A \to W$ välissäolon vahvasti säilyttävä kuvaus, sekä l ja m affiinin aliavaruuden A suoria. Oletetaan, että $f[A]$ on myös affini aliavaruus. Tällöin jos $l \parallel m$, niin $f[l] \parallel f[m]$.*

Todistus. Oletetaan, että $l \parallel m$. Voidaan myös olettaa, että $l \neq m$. Valitaan $a \in l$ ja $c \in m$. Koska $l \parallel m$, niin suorilla l ja m on sama suunta-avaruus, joten on olemassa $u \neq \mathbf{0}$, joka kuuluu yhteiseen suunta-avaruuteen, jolloin $b = a + u \in l$ ja $d = c - u \in m$. Merkitään $p = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$. Koska $b + d = (a+u) + (c-u) = a + c$, niin myös $p = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$. Tästä seuraa $B(a,p,c)$ ja $B(b,p,d)$.

Tarkastellaan sitten maaliavaruudessa suoria $l' = \ell(f(a), f(b))$ ja $m' = \ell(f(c), f(d))$. Välissäolon säilymisestä seuraa suoraan, että $f[l] \subseteq l'$ ja $f[m] \subseteq m'$, mutta koska $f[A]$ on affiini aliavaruus ja välissäolo säilyy vahvasti, saadaan sisältyvyydet toiseenkin suuntaan.

Siis $f[l] = l'$ ja $f[m] = m'$. Koska f säilyttää (vahvasti) välissäolon, $B(a,p,c)$ ja $B(b,p,d)$, niin $B(f(a), f(p), f(c))$ ja $B(f(b), f(p), f(d))$. Siis $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ ja $f(p)$ ovat samassa tasossa.

Oletetaan vastoin väitettä, että $l' \nparallel m'$. Kuitenkin $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ ja $f(d)$ ovat samassa tasossa, joten edellisen lemman kohdasta b seuraa, että $l' \cap m' \neq \emptyset$. Valitaan $q' \in l' \cap m' \subseteq f[A]$ ja $q \in A$, jolle $f(q) = q'$. Koska $f(a)$, $f(b)$ ja $f(q)$ ovat samalla suoralla l', niin $B(f(q), f(a), f(b))$, $B(f(a), f(q), f(b))$ tai $B(f(a), f(b), f(q))$. Tästä seuraa edelleen $B(q,a,b)$, $B(a,q,b)$ tai $B(a,b,q)$, sillä f säilyttää välissäolon vahvasti, mikä merkitsee, että $q \in \ell(a,b) = l$. Aivan vastaavasti osoitetaan, että $q \in m$. Siis $l \cap m \neq \emptyset$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että l ja m ovat yhdensuuntaisia eri suoria. □

Lemma 2.33. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus sekä $f\colon A \to W$ välissäolon vahvasti säilyttävä kuvaus. Oletetaan, että $\dim A \geq 2$ ja $f[A]$ W:n affiini aliavaruus. Olkoot $a, c \in A$. Tällöin*

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $a \neq c$. Merkitään affiinin aliavaruuden A suunta-avaruutta U:lla. Huomataan, että $c - a \in U$, sillä $c, a \in A$. Koska $\dim A \geq 2$, voidaan valita $v \in U$, jolle $\{c - a, v\}$ on vapaa. Merkitään $p = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$, $b = p - v$ ja $d = p + v$; jolloin $b, d \in A$ ja $b + d = p - v + p + v = 2p = a + c$. Siis a, b, c ja d ovat suunnikkaan kärjet. Koska $a + c = b + d$, lemman 2.31 kohdasta c seuraa, että $\ell(a,b) \parallel \ell(c,d)$ ja $\ell(b,c) \parallel \ell(a,d)$. Edellisestä lemmasta seuraa siis

$$\ell(f(a), f(b)) \parallel \ell(f(c), f(d)) \text{ ja } \ell(f(b), f(c)) \parallel \ell(f(a), f(d)).$$

Lemmasta 2.31 seuraa siten $f(a)+f(c) = f(b)+f(d)$. Edelleen tiedetään, että $B(f(a), f(p), f(c))$ ja $B(f(b), f(p), f(d))$, joten

$$\ell(f(a), f(c)) = \ell(f(b), f(d)) = \{f(p)\}.$$

Tästä ja yhtälöstä $f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$ seuraa

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = f(p) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

□

Lemma 2.34. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia sekä A V:n affiini aliavaruus. Olkoon $f\colon A \to W$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) f on affiini kuvaus.

b) f säilyttää välissäolon ja kaikilla $a, c \in A$ pätee

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

Todistus. a) $\Rightarrow$ b): Oletetaan, että f on affiini. Olkoot $x, y, z \in A$ pisteitä, joille $B(x, y, z)$. Tällöin $y = tx + (1-t)z$ jollakin $t \in [0,1]$. Koska f on affiini, niin $f(y) = f(tx + (1-t)z) = tf(x) + (1-t)f(z)$, joten $B(f(x), f(y), f(z))$, sillä $t \in [0,1]$. Siis f säilyttää välissäolon. Jälkimmäinen kohdan b ehto on yksinkertaisesti affiiniusehto arvolla $t = \frac{1}{2}$. Siis kohdan b ehto voimassa.

b) $\Rightarrow$ a): Oletetaan, että kohdan b ehto on voimassa. Kiinnitetään $a, c \in A$. Voidaan olettaa, että $a \neq c$. Merkitään $p_t = ta + (1-t)c \in \ell(a,c)$, kun $t \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_u &= \frac{t}{2}a + \frac{1-t}{2}c + \frac{u}{2}a + \frac{1-u}{2}c \\ &= \frac{t+u}{2}a + \frac{1-t+1-u}{2}c = \frac{t+u}{2}a + \left(1 - \frac{t+u}{2}\right)c = p_{(t+u)/2}.\end{aligned}$$

Merkitään symbolilla S kaikkien niiden $t \in \mathbb{R}$ joukkoa, joille pätee

$$f(p_t) = tf(a) + (1-t)f(c),$$

ts. affiiniusehto pätee pisteelle p_t. Selvästi $0, 1 \in S$. Oletuksesta saadaan myös, että jos $u, t \in S$, niin

i) $\frac{1}{2}(t+u) \in S$ ja

ii) $2u - t \in S$

Kohta i seuraa siitä, että kun $t, u \in S$, niin

$$\begin{aligned}f(p_{(t+u)/2}) &= f\left(\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_u\right) \\ &= \frac{1}{2}f(p_t) + \frac{1}{2}f(p_u) \\ &= \frac{1}{2}\big(tf(a) + (1-t)f(c)\big) + \frac{1}{2}\big(uf(a) + (1-t)f(c)\big) \\ &= \frac{t+u}{2}f(a) + \left(1 - \frac{t+u}{2}\right)f(c).\end{aligned}$$

Kohta ii päätellään samaan tyyliin: Kun $t, u \in S$, niin havaintoa $u = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(2u-t))$ hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned}uf(a) + (1-u)f(c) &= f(p_u) = f\left(\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_{2u-t}\right) \\ &= \frac{1}{2}f(p_t) + \frac{1}{2}f(p_{2u-t}) = \frac{1}{2}\big(tf(a) + (1-t)f(c) + f(p_{2u-t})\big),\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned}&tf(a) + (1-t)f(c) + f(p_{2u-t}) = 2uf(a) + (2-2u)f(c) \\ &\Rightarrow f(p_{2u-t}) = (2u-t)f(a) + (1-(2u-t))f(c) \\ &\Rightarrow 2u - t \in S.\end{aligned}$$

Ehdosta ii saadaan induktiolla, että $\mathbb{N} \subseteq S$. Nimittäin selvästi $0, 1 \in S$ ja jos $t, t+1 \in S$, niin

$$2(t+1) - t = 2t + 2 - t = t + 2 \in S.$$

Kun $t \in \mathbb{N}$, niin $t, 0 \in S$, joten kohdasta ii seuraa $-t = 2 \cdot 0 - t \in S$. Siis $\mathbb{Z} \subseteq S$. Toistamalla kohtaa i saadaan nyt suoralla induktiolla

$$\left\{ \frac{m}{2^k} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S.$$

Vihdoin ollaan valmiita näyttämään, että $S \subseteq \mathbb{R}$. Olkoot nimittäin $t \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Valitaan $m \in \mathbb{Z}$, jolle $m/2^k \leq t \leq (m+1)/2^k$. Tällöin

$$B(p_{m/2^k}, p_t, p_{(m+1)/2^k}),$$

joten koska f säilyttää välissäolon, niin myös

$$B(f(p_{m/2^k}), p_t, f(p_{(m+1)/2^k})).$$

Koska $f(p_{m/2^k}) = (m/2^k)f(a) + (1 - m/2^k)f(c)$ ja $f(p_{(m+1)/2^k}) = ((m+1)/2^k)f(a) + (1 - (m+1)/2^k)f(c)$, niin näiden välissäolevana pisteenä $f(p_t) = t'f(a) + (1-t')f(c)$ jollakin $t' \in [m/2^k, (m+1)/2^k]$. Koska myös $t \in [m/2^k, (m+1)/2^k]$, niin $|t - t'| \leq 2^k$. Koska $k \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen, niin täytyy olla $t = t'$. Siis $t \in S$.

Siis $S = \mathbb{R}$ ja koska päättely pätee kaikille $a, c \in A$, niin affiiniusehto pätee yleisesti eli f on affiini kuvaus. □

Lause 2.35. *Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $A \subseteq V$. Olkoon $f: A \to W$. Oletetaan, että A on V:n ja $f[A]$ W:n affiini aliavaruus ja lisäksi* $\dim A \geq 2$. *Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

a) f on affiini injektio.

b) f säilyttää vahvasti välissäolon.

Todistus. Oletetaan ensin, että f on affiini injektio. Tällöin edellisen lemman nojalla f säilyttää välissäolon. Lisäksi $f: A \to f[A]$ on bijektio, joten voidaan tarkastella sen käänteiskuvausta $f^{-1}: f[A] \to A$ injektiona $f^{-1}: f[A] \to V$. Koska f^{-1} on affiini injektio, niin sekin säilyttää välissäolon. Siis kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

$$\begin{aligned} B(a,b,c) \quad &\Rightarrow \quad B(f(a), f(b), f(c)) \\ &\Rightarrow \quad B(f^{-1}(f(a)), f^{-1}(f(b)), f^{-1}(f(c))) \\ &\Rightarrow \quad B(a,b,c). \end{aligned}$$

Siis f säilyttää välissäolon vahvasti.

Oletetaan sitten, että f säilyttää vahvasti välissäolon. Tästä seuraa triviaalisti, että f säilyttää välissäolon. Aiemmin on lemmassa 2.33 todettu, että kaikilla $a, c \in A$ pätee:

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

Siis f on edellisen lemman mukaan affiini kuvaus. Osoitetaan vielä, että f on injektio. Olkoot $a, b \in A, a \neq b$. Tällöin $\neg B(a, b, a)$. Koska f säilyttää välissäolorelaation vahvasti, niin $\neg B(f(a), f(b), f(a))$. Siis $f(a) \neq f(b)$. $\square$

Affiini geometria on siis välissäolon geometriaa. Tasoista lähtien kaikki tarkastelut voitaisiin tehdä rakenteissa (V, B), missä B on välissäolorelaatio. Affiinissa geometriassa ei tarvita etäisyyksiä eikä kulmia. Affiini geometria ei tunnista ympyrän ja ellipsin eroa.