

Logiikan uusimpia suuntauksia

5. Lisää selitettävyydestä

Näissä muistiinpanoissa jatketaan selitettävyyden käsitteen tarkastelua. Aluksi tutustumme lähteen [1] lukuun 3.2. Luku 3.2 ei sisälly kurssin tentittävään materiaaliin.

<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/150660/Lehtimaki.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

[1] Ilpo Lehtimäki. Ilpo Lehtimäki. *Selitettävyydestä propositiologiikassa*. Tampereen yliopisto, 2023.

Luvun 3.2 kommentointia

Luvussa 3.2 hyödynnetään **metriikan** ja **pseudometriikan** käsitteitä. Näillä käsitteillä tutkitaan olioiden *etäisyyttä* abstraktilla tasolla. Alla $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tarkoittaa joukkoa $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, ja V on mielivaltainen joukko.

Määritelmä 5.1

Metriikka on funktio $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jolle pätee

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Määritelmä 5.2

Pseudometriikka on funktio $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jolle pätee

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Erona metriikan ja pseudometriikan välillä siis on, että pseudometriikka sallii muitakin etäisyydellä 0 olevia olioita kuin olio itse.

Luvun 3.2 kommentointia

Luku 3.2 esittää yhden esimerkin klassisen ensimmäisen kertaluvun logiikan käyttämisestä selittämiseen tavalla, jossa joukko V ei ole tavanomainen totuusarvojoukko $\{0, 1\}$. Esitetään tässä toinen.

Luvun 3.2 kommentointia

Aluksi määritellään logiikka $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, v, m)$.

Olkoon $\mathcal{M} = \{\mathfrak{M}\}$, missä $\mathfrak{M}$ on äärellinen τ -malli, $\tau = \{R\}$ ja R kaksi-paikkainen. Joukko $\mathcal{M}$ sisältää siis vain yhden mallin.

Olkoon $\mathcal{F}$ niiden FO-kaavojen joukko, joiden aakkostona on τ ja jotka sisältävät täsmälleen kaksi vapaata muuttujaa, v_1 ja v_2 . Kyseessä on siis joukko, joka sisältää τ -kaavat muotoa $\varphi(v_1, v_2)$.

Luvun 3.2 kommentointia

Semantiikkafunktio $v : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow V$ määritellään seuraavasti. Ensiksi kiinnitetään

$$V = \{R \mid R \subseteq M \times M\}$$

missä M siis on $\text{dom}(\mathfrak{M})$. Joukko V on siis joukon M kaksipaikkaisien relaatioiden joukko. Olemme siis määrittelemässä logiikkaa, jonka arvojoukko V sisältää kaksipaikkaisia relaatioita. Määrittelemme tämän siten, että

$$v(\mathfrak{M}, \varphi(v_1, v_2)) = \varphi^{\mathfrak{M}}(v_1, v_2),$$

missä siis $\varphi^{\mathfrak{M}}(v_1, v_2)$ on joukko

$$\{(a, b) \in M \times M \mid \mathfrak{M}, \{(v_1, a), (v_2, b)\} \models \varphi(v_1, v_2)\}$$

Lopuksi, määritellään m funktioksi, joka antaa jokaiselle syötteenä olevalle kaavalle $\varphi(v_1, v_2)$ pituuden jollakin luonnollisella tavalla. Esimerkin kannalta ei ole tärkeää, miten pituus täsmällisesti ottaen määräytyy.

Luvun 3.2 kommentointia

Tarkastellaan tälle logiikalla selitysongelmia muotoiltuna lähteen [1] määritelmän 3.2.4 mukaan. Tätä varten tarvitsee siis vielä muotoilla reaalilukujen esitys $r : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja tähän liittyvä symbolijoukko $\mathcal{R}$ sekä symboliesitys $w : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(V)$ sopivalle symbolijoukolle $\mathcal{V}$ ja potenssijoukolle $\mathcal{P}(V)$. Lisäksi on kiinnitettävä metriikka joukolle V ja pseudometriikka joukolle $\mathcal{F}$.

Määritellään aluksi, että $\mathcal{R}$ on sopiva kaksidesimaalisten lukujen joukko, joka sisältää luvut muotoa $n.ab$ jossa $a, b \in \{0, \dots, 9\}$ ja

$$n \in \{0, \dots, k\}.$$

Tässä k on jokin tarpeeksi suuri kokonaisluku, vaikkapa 100. Määritellään, että funktio $r : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ antaa tulosteeksi yksinkertaisesti syötettä vastaavan luvun, eli jos syötteenä on symbolijono 38.95, on tulosteena luku $38.95 \in \mathbb{R}$ (eli "38-pilkku-95").

Joukkoa $\mathcal{V}$ ja funktiota $w : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}(V)$ tarvitaan erityisessä selitysongelmassa. Jätetään ne nyt määrittelemättä, koska niiden tarkat määritelmät eivät esimerkiksi kannalta ole välttämättömiä.

Luvun 3.2 kommentointia

Palautetaan sitten mieleen **symmetrisen erotuksen** käsite. Joukkojen S ja R symmetrinen erotus on joukko $\{u \mid u \in ((R \setminus S) \cup (S \setminus R))\}$, eli niiden alkuiden joukko, jotka kuuluvat täsmälleen yhteen joukoista R ja S . Käytetään merkintää $R \oplus S$ joukkojen R ja S symmetriselle erotukselle.

Määritellään sitten metriikka $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ joukolle

$$V = \{R \mid R \subseteq M \times M\}$$

siten, että

$$d(S, R) = \frac{|R \oplus S|}{|M \times M|} \cdot 100.$$

Tässä siis $\frac{|R \oplus S|}{|M \times M|}$ antaa niiden parien $u \in M \times M$ suhteellisen osuuden, jotka kuuluvat täsmälleen yhteen relaatioista R ja S . Kerroin 100 muuttaa tämän prosenttiosuudeksi. Tämä metriikka siis antaa intuitiivisesti ottaen prosentuaalisen *virheen* relaatioiden R ja S samuudelle. Mikäli etäisyys on 0, virhettä ei ole, ja relaatiot ovat samat. Mikäli relaatiot ovat toistensa komplementteja, virhe on 100. On helppo osoittaa, että d on metriikka.

Luvun 3.2 kommentointia

Määritellään lisäksi pseudometriikka $g : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ siten, että $g(\varphi(v_1, v_2), \psi(v_1, v_2)) = d(\varphi^{\mathfrak{M}}(v_1, v_2), \psi^{\mathfrak{M}}(v_1, v_2))$.

Funktio g siis on oleellisesti sama, kuin metriikka d , mutta ottaa syötteinä kaavoja relaatioiden sijaan. Funktio g on pseudometriikka (eikä metriikka kuten d) koska sama relaatio voidaan kuvata usealla eri kaavalla.

Luvun 3.2 kommentointia

Tarkastellaan sitten tälle logiikalle yleistä selitysongelmaa kuten määritelmässä 3.2.4.

Tutkitaan syötettä (φ, ϵ) , missä $\varphi \in \mathcal{F}$ on kaava ja $\epsilon \in \mathcal{R}$ jonkin reaaliluvun symboliesitys. Vastauksena yleiseen selitysongelmaan tulisi olla kaava $\psi \in \mathcal{F}$, jolla pituus $m(\mathfrak{M}, \psi)$ on pienin mahdollinen siten, että $g(\varphi, \psi) \leq r(\epsilon)$. Toisin sanoen, etsimme mahdollisimman lyhyen kaavan, jolle virhe $g(\varphi, \psi)$ on korkeintaan $r(\epsilon)$ prosenttia.

Tarkastellaan konkreettista syötettä

$$(Rv_1 v_2 \wedge \exists x \forall y (\neg x = y), 5.01).$$

Nyt siis pitäisi löytää mahdollisimman lyhyt kaava, jolle virhe suhteessa syötekaavaan on korkeintaan 5.01 prosenttia. Koska alkuperäinen kaava ei toteudu missään mallissa, kelpaa tällaiseksi kaavaksi ristiriita. Emme määritelleet pituusfunktiota m tarkkaan, mutta lyhin ristiriita annetussa kielessä voisi olla vaikkapa muotoa $\neg v_1 = v_1 \wedge v_2 = v_2$. (Huom., määrittelimme kielen niin, että molempien symbolien v_1 ja v_2 esiintyminen vapaana muuttujana vaadittiin.)

Luvun 3.2 kommentointia

Erityisessä selitysongelmassa voidaan hyödyntää myös syötteitä $B \in \mathcal{V}$, jolloin tavoitteena on selittää miksi joku syöte tuli luokitelluksi siten, että sen totuusarvo kuuluu B :n kuvaamaan joukkoon. Käydään vielä läpi tällaisia totuusarvojoukkoja koskeva *epämuodollinen* esimerkki sopivalle logiikalle:

$\mathcal{M}$ sisältää jonot $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$

$\mathcal{F}$ sisältää polynomit muuttujilla x, y, z

$v : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ antaa syötejonon $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ määräämän arvon $u \in \mathbb{Z}$ syötepolynomille (sijoitus $x = k_1, y = k_2, z = k_3$). m antaa polynomin pituuden

Erityinen selitysongelma voi nyt kysyä, miksi $x + x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2$ on positiivinen syötejonolla $(x, y, z) = (2, -6, 4)$. Tässä siis ei kysytä, miksi polynomi saa jonkun tietyn arvon joukossa $\mathcal{V}$, vaan kysytään, miksi polynomin arvo kuuluu joukkoon $w(P) = \{u \in \mathbb{Z} \mid u \text{ positiivinen}\}$ (missä siis w on symboliesitysfunktio ja $P \in \mathcal{V}$ on symboli, joka vastaa positiivisten kokonaislukujen joukkoa).

Erityinen selitysongelma voi antaa tulosteena polynomin x koska x on positiivinen sijoituksella $x = 2$, ja lisäksi, kun x on positiivinen, niin myös alkuperäinen polynomi on positiivinen.