

Logiikan uusimpia suuntauksia

1. Mallin käsitteestä

Mallin käsite

Diskreetin matematiikan ja algebran tutkimus käsittelee matemaattisia *rakenteita* eli *struktuureja*. Esimerkiksi pari $(\mathbb{Z}, +)$, eli siis pari

$$(\mathbb{Z}, \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}, x + y = z\}),$$

on rakenne. Samaan tapaan, pari $(\mathbb{N}, \leq)$, missä

$$\leq = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$$

on rakenne.

Rakenteen idea voidaan formalisoida määrittelemällä **mallin** käsite.

Ennen mallin käsitteen määrittelemistä, kerrataan **relaation** ja **funktion** käsitteet formaalisti.

Relaatiot

Merkitäköön $\mathbb{Z}_+$ positiivisia kokonaislukuja, eli $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Jos X on joukko, niin merkintä X^n viittaa joukon X n -kertaiseen karteesisen tuloon, eli

$$X^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in X \}.$$

Määritelmä 1.1

Joukko $R \subseteq X^n$ on n -paikkainen **relaatio** joukossa X . Luku n on relaatien R **paikkaluku**.

Toisin sanoen, n -paikkainen relaatio joukossa X on mikä tahansa joukko R joukon X alkioista koostuvia jonoja $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Tällaista jonoa voidaan kutsua myös **n -paikkaiseksi jonoksi** tai **n -jonoksi**, mikäli halutaan korostaa paikkalukua n .

Huom., joukon X alkioita $x \in X$ voidaan kutsua myös joukon X *pisteeksi* tai *elementiksi*.

Relaatiot

Example 1.2

Joukko

$$P = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

on yksipaikkainen relaatio (eli **unaarirelaatio**) joukossa $\mathbb{R}$. Relaatio sisältää täsmälleen kaikki positiiviset reaaliluvut. Joukko

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \}$$

yksipaikkainen relaatio joukossa $\mathbb{R}$. Tämä relaatio sisältää täsmälleen kaikki rationaaliluvut.

Relaatiot

Esimerkki 1.3

Joukko

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \}$$

on kaksipaikkainen relaatio (eli **binääirelaatio**) joukossa $\mathbb{R}$. Relaatio S sisältää täsmälleen parit (x, y) joille pätee $x \leq y$. Selvästi S on tavallinen “pienempi tai yhtä suuri kuin” -relaatio jokossa $\mathbb{R}$. Nyt siis esimerkiksi $(2, 3) \in S$ ja $(10, 1) \notin S$. Matemaattisissa teksteissä relaatioon S usein viitataan kirjoittamalla $\leq^{\mathbb{R}}$ tai yksinkertaisesti vain $\leq$. Tästä jälkimmäisestä merkinnästä itsestään ei kuitenkaan selviä, että tarkoitetaan nimenomaan realilukujen (eikä esim. luonnollisten lukujen) järjestystä.

Relaatiot

Esimerkki 1.4

Merkitköön $E = \mathbb{R}^2$ euklidista tasoa. Joukko

$$P = \{ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in E^3 \mid \bar{x} + \bar{y} = \bar{z} \}$$

on kolmepaikkainen relaatio joukossa E . Relaatio P sisältää täsmälleen ne kolmikot $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in E^3$ joille pätee $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z}$. Kyseessä on siis euklidisen tason vektorisumman koodaava relaatio.

Toisaalta relaatio P on luonnollista ajatella myös yksipaikkaisena relaationa joukossa $\mathbb{R}^6$, sisältäen täsmälleen ne kuusikot $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ joille pätee

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2).$$

Relaatiot

Yksi- ja kaksipaikkaiset relaatiot lienevät yleisimpiä matemaattisen logiikan kirjallisuudessa esiintyviä relaatioita. Määritellään seuraavaksi tärkeitä kaksipaikkaisten relaatioiden ominaisuuksia.

Olkoon R kaksipaikkainen relaatio joukossa X , eli $R \subseteq X^2 = X \times X$.

1. R on **refleksiivinen** jos $(x, x) \in R$ kaikille $x \in X$.
 R is **irrefleksiivinen** jos $(x, x) \notin R$ pätee kaikille $x \in X$.
2. R on **symmetrinen** jos

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

kaikille $x, y \in R$.

R on **antisymmetrinen** jos

$$\forall x, y \in X \left(((x, y) \in R \text{ ja } (y, x) \in R) \Rightarrow x = y \right).$$

3. R on **transitiivinen** jos

$$\forall x, y, z \in X \left(((x, y) \in R \text{ ja } (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R \right).$$

Relaatiot

Esimerkki 1.5



Kuvassa on kaksipaikkainen relaatio $R = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$ joukossa $\{a, b, c\}$. Relaatio ei ole symmetrinen, sillä $(a, b) \in R$ mutta $(b, a) \notin R$. Toisaalta, R ei ole myöskään antisymmetrinen, sillä $(b, c), (c, b) \in R$ ja $b \neq c$. Onko R transitiivinen? Onko relaatio $\{(b, c), (c, b)\}$ joukossa $\{c, b\}$ transitiivinen?

Relaatiot

Määritelmä 1.6

Olkoot $R, S \subseteq X \times X$ kaksipaikkaisia relaatioita. Relaaation R **käänteisrelaatio** R^{-1} määritellään seuraavasti:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Relaatioiden R ja S **kompositio** on relaatio

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times X \mid$$

Jollekin $y \in X$ pätee $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in S$.

On helppo osoittaa, että $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Relaatiot

Lemma 1.7

Olkoon R kaksipaikkainen relaatio. Tarkastellaan relaatiota $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^{(n)}$ missä $R^{(1)} = R$ ja $R^{(n+1)} = R \circ R^{(n)}$. Relaatio $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^{(n)}$ on transitiivinen.

Todistus. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi käytetään merkintää R^n merkinnän $R^{(n)}$ sijaan. Merkinnällä R^n ei siis tässä tarkoitata n -kertaista karteesisista tuloa.

Osoitetaan aluksi induktiolla luvun m suhteen, että $R^m \circ R^n = R^{m+n}$. Kun $m = 1$, niin määritelmän nojalla $R^1 \circ R^n = R \circ R^n = R^{n+1}$, joten perusaskel on siis selvä. Oletetaan sitten, että $R^k \circ R^n = R^{k+n}$. Tällöin $R^{k+1} \circ R^n = (R \circ R^k) \circ R^n = R \circ (R^k \circ R^n) = R \circ R^{k+n} = R^{k+n+1}$. (Huom., käytimme tässä aiemmin todettua relaatioiden komposition liitännäisyysominaisuutta.) Täten olemme osoittaneet, että $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

Todistetaan sitten, että $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$ on transitiivinen. Oletetaan $(x, y), (y, z) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$. Täten $(x, y) \in R^m$ ja $(y, z) \in R^n$ joillekin n ja m . Näin ollen $(x, z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$. Koska $R^{m+n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$, niin $(x, z) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$. $\square$

Relaatiot

Määritelmä 1.8

Olkoon $R \subseteq X \times X$. Relaation R **transitiivinen sulkeuma** $\text{TC}(R) \subseteq X \times X$ on pienin transitiivinen relaatio $T \subseteq X \times X$ jolle pätee $R \subseteq T$. Muodollisemmin, transitiivinen sulkeuma $\text{TC}(R)$ on transitiivinen relaatio $T \subseteq X \times X$ jolle pätee

1. $R \subseteq T$ ja
2. $T \subseteq V$ jokaiselle transitiiviselle relaatiolle $V \subseteq X \times X$ jolle $V \supseteq R$.

Esimerkki 1.9

Tarkastellaan kaksipaikkaista relaatiota

$$S = \{(s, t) \in \mathbb{N}^2 \mid t = s + 1\}.$$

Relaatiota S kutsutaan **seuraajarelaatioksi** joukossa $\mathbb{N}$. Joukon S transitiivinen sulkeuma $\text{TC}(S)$ on tiukka lineaarijärjestys joukossa $\mathbb{N}$, eli relaatio

$$<^{\mathbb{N}} = \{(s, t) \in \mathbb{N}^2 \mid s < t\}.$$

Relaatiot

Lause 1.10

Olkoon $R \subseteq X \times X$ kaksipaikkainen relaatio. Olkoon F niiden transitiivisten relaatioiden $T \subseteq X \times X$ joukko, joille pätee $R \subseteq T$. Tällöin

$$\text{TC}(R) = \bigcap F.$$

Toisaalta edeltä tiedämme, että

$$\text{TC}(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^{(n)}$$

missä $R^{(1)} = R$ ja $R^{(n+1)} = R \circ R^{(n)}$.

Todistus. Todistetaan aluksi, että $\text{TC}(R) = \bigcap F$ osoittamalla, että $\bigcap F$ on (osajoukkorelaation $\subseteq$ suhteen) pienin transitiivinen joukko U , jolle pätee $R \subseteq U$. Havaitaan aluksi, että $F \neq \emptyset$ koska $X \times X \in F$. Täten $\bigcap F$ on yksikäsitteisesti määritelty joukko (huom., oliolle $\bigcap \emptyset$ ei ole yksikäsitteistä määritelmää).

Osoitetaan sitten, että $\bigcap F$ on transitiivinen:

$$\begin{aligned}(x, y), (y, z) \in \bigcap F &\Rightarrow (x, y), (y, z) \in T \text{ kaikille } T \in F \\ &\Rightarrow (x, z) \in T \text{ kaikille } T \in F \\ &\Rightarrow (x, z) \in \bigcap F.\end{aligned}$$

Koska $\bigcap F$ on leikkaus transitiivisista joukoista $U \supseteq R$, on nyt selvää, että $\bigcap F$ on pienin transitiivinen joukko $V \supseteq R$. Täten $\text{TC}(R) = \bigcap F$.

Osoitetaan sitten, että $\text{TC}(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$, missä jälleen - yksinkertaisuuden vuoksi - käytämme merkintää R^n merkinnän $R^{(n)}$ sijaan. Lemman 1.7 nojalla $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n$ on transitiivinen. Täten riittää osoittaa, että mikäli $S \supseteq R$ on transitiivinen relaatio joukossa $X \times X$, niin

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} R^n \subseteq S.$$

Olkoon S siis transitiivinen relaatio, jolle pätee $R \subseteq S$. Osoitetaan induktiolla, että $R^n \subseteq S$ kaikilla n . Oletuksen perusteella $R^1 = R \subseteq S$, joten perusaskel on selvä.

Oletetaan, että $R^n \subseteq S$. Oletetaan lisäksi, että $(x, z) \in R^{n+1} = R \circ R^n$.
Täten $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R^n$ jollekin y . Koska $R \subseteq S$, niin $(x, y) \in S$,
ja koska induktio-oletuksen nojalla $R^n \subseteq S$, niin $(y, z) \in S$. Koska S on
transiitiivinen, niin $(x, z) \in S$. Tätten $R^{n+1} \subseteq S$. $\square$

Relaatiot

Esimerkki 1.11

Olkoon P vanhemmuusrelaatio, eli $(x, y) \in P$ jos ja vain jos y on henkilön x jompikumpi vanhempi. Tällöin $TC(P)$ on esivanhemmuusrelaatio, eli $(x, y) \in P$ jos ja vain jos y on x :n esivanhempi.

Relaatiot

Määritellään yleisiä relaatiotyypppejä.

Definition 1.12

Olkoon R kaksipaikkainen relaatio joukossa X .

1. R on **esijärjestys** jos se on refleksiivinen ja transitiivinen.
2. R on **osittainjärjestys** jos se on refleksiivinen, transitiivinen ja antisymmetrinen.
3. R on **refleksiivinen lineaarijärjestys** jos se on osittainjärjestys ja toteuttaa seuraavan *vertailullisuusehdon*:

kaikille $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in R$ tai $(y, x) \in R$.

4. R on **tiukka lineaarijärjestys** jos se on irrefleksiivinen, transitiivinen ja toteuttaa seuraavan *trikotomiaehdon*:

kaikille $x, y \in X$, täsmälleen yksi seuraavista pätee.

- ▶ $(x, y) \in R$,
- ▶ $(y, x) \in R$,
- ▶ $x = y$.

Relaatiot

“Pienempi tai yhtä suuri kuin” -relaatiot $\leq$ joukoissa $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ovat esimerkkejä refleksiivisistä lineaarijärjestyksistä. Vastaavat relaatiot $<$ ovat tiukkoja lineaarijärjestyksiä.

Matemaattisessa kirjallisuudessa termi “lineaarijärjestys” voi tarkoittaa niin refleksiivistä kuin tiukkaakin lineaarijärjestystä. Yleensä on asiayhteydestä selvä, kumpaa tarkoitetaan. Tällä kurssilla termi “lineaarijärjestys” tarkoittaa oletusarvoisesti refleksiivistä järjestystä.

Kirjallisuudessa refleksiivistä lineaarijärjestystä voidaan kutsua myös heikoksi lineaarijärjestykseksi. Toisaalta, tiukkaa lineaarijärjestystä voi kutsua irrefleksiiviseksi lineaarijärjestykseksi.

Relaatiot

Määritelmä 1.13

Kaksipaikkainen relaatio R joukossa X on **ekvivalenssirelaatio** jos se on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen. Relaatio R on **identiteettirelaatio** jos $R = \{ (x, x) \mid x \in X \}$.

Esimerkki 1.14

Tarkastellaan kaksipaikkaista "sama syntymävuosi" -relaatiota B jolle pätee että $(x, y) \in B$ jos ja vain jos x ja y ovat syntyneet samana vuonna. Relaatio B on selvästi ekvivalenssirelaatio.

Funktiot

Kerrataan myös perusmääritelmät liittyen *funktioihin* eli *kuvauksiin*.

Olkoot X ja Y joukkoja ja $n \in \mathbb{Z}_+$. **Funktio** $f : X^n \rightarrow Y$ liittää jokaiseen jonoon $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ täsmälleen yhden alkion $f(x_1, \dots, x_n) \in Y$.

Funktioista

Funktiota

$$g : X^n \rightarrow X$$

kutsutaan **n -paikkaiseksi funktioksi** joukossa X ja funktiota

$$f : X^n \rightarrow Y$$

n -paikkaiseksi funktioksi. Joukko X^n on f :n **määrittelyjoukko** tai **domaini**. Myös termiä **lähtöjoukko** käytetään. Joukko Y puolestaan on f :n **maali-joukko** (englanniksi **codomain**). Funktion f **kuvajoukko** on joukko

$$\{y \in Y \mid \text{Jollekin } (x_1, \dots, x_n) \in X^n \text{ pätee } f(x_1, \dots, x_n) = y\}.$$

Alkio $f(x_1, \dots, x_n)$ on jonon $(x_1, \dots, x_n)$ **kuva** (suhteessa funktioon $f : X^n \rightarrow Y$). Kun $n = 1$, niin $f(x) \in Y$ on alkion x kuva.

Funktiot

Tarkastellaan n -paikkaista funktiota $f : X^n \rightarrow Y$. Funktio samastetaan joukon

$$\{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in X^{n+1} \mid x_1, \dots, x_n \in X \}$$

kanssa. Funktio $f : X^n \rightarrow Y$ on siis joukko $(n+1)$ -paikkaisia jonoja $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$. Tätä samastusta voidaan kutsua funktion f *extensionaaliseksi tulkinnaksi*.

Huomaa, että kun $X = Y$, jolloin f on n -paikkainen funktio joukossa X , on f selvästi myös $(n+1)$ -paikkainen relaatio joukossa X . Toisin sanoen, tällaiset funktiot voidaan helposti koodata relaatioina joukossa X .

Funktiot

Funktioiden ekstensionaalinen tulkinta on yleensä harmitonta, mutta tarkalleen ottaen tällöin menetetään tieto funktion maalijoukosta. Tämä johtuu siis siitä, että funktioille $f : X^n \rightarrow A$ ja $g : X^n \rightarrow B$ voi päteä, että

1. $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ kaikilla $\bar{x} \in X^n$
2. $A \neq B$.

Esim. kategorioteoriassa funktioita f ja g vastaavat täysin eri morfismit.

Tällä kurssilla funktioiden ekstensionaalinen tulkinta on käytännössä kuitenkin turvallista.

Funktiot

n -paikkainen **osittaisfunktio** joukolta X^n joukkoon Y on funktio

$$f : V \rightarrow Y$$

missä $V \subseteq X^n$.

Funktiot

Määritelmä 1.15

Olkoon $f : A \rightarrow B$ yksipaikkainen funktio. Funktio f on **injektio** jos kaikille alkoille $x, y \in A$ (missä $x \neq y$) pätee $f(x) \neq f(y)$. Toisin sanoen, eri alkiot kuvautuvat eri alkioille. Funktio f on **surjektio** jos kaikille $b \in B$ on olemassa $a \in A$ jolle pätee $f(a) = b$. Toisin sanoen, jokaiselle pisteelle b maalijoukossa B on jokin alkio $a \in A$ joka kuvautuu pisteeksi b . Funktio f on **bijektio** jos se on injektio ja surjektio.

Funktiot

Olkoon $f : A \rightarrow A$ yksipaikkainen funktio joukossa A . Alkio $a \in A$ on funktion f **kiintopiste** jos $f(a) = a$.

Example 1.16



Kuvassa on kaksipaikkainen relaatio $R = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ joukossa $\{a, b, c\}$. Relaatio R on myös yksipaikkainen funktio f jolla on kiintopiste c , eli $f(c) = c$. Pari (c, c) on relaation R **refleksiivinen luuppi** tai **refleksiivinen silmukka**.

Mallit

Ennen mallin käsitteen formaalia määritelmää, tutkitaan käsitettä epämuodollisesti. Tarkastellaan seuraavia rakenteita (nk. kuntia):

$$(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1)$$

ja

$$(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0, 1)$$

missä

1. $+^{\mathbb{R}}$ on kaksipaikkainen funktio $+^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ joka vastaa reaalilukujen summausta
2. $\cdot^{\mathbb{R}}$ on kaksipaikkainen funktio $\cdot^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ joka vastaa reaalilukujen kertolaskua
3. $+^{\mathbb{Q}}$ kaksipaikkainen funktio $+^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ joka vastaa rationaalilukujen summausta
4. $\cdot^{\mathbb{Q}}$ on kaksipaikkainen funktio $\cdot^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ joka vastaa rationaalien kertolaskua.

Rakenteet $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1)$ ja $(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0, 1)$ ovat esimerkkejä malleista.

Mallit

Myös seuraavat rakenteet (nk. **järjestetyt kunnat**)

$$(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{R}})$$

ja

$$(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{Q}})$$

ovat myös esimerkkejä malleista. Relaatiot

$$\leq^{\mathbb{R}} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \} \text{ ja}$$

$$\leq^{\mathbb{Q}} = \{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x \leq y \}$$

ovat joukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q}$ refleksiiviset lineaarijärjestykset.

Mallit

Perinteisesti mallejen on ajateltu olevan matemaattisia rakenteita joihin voi koodata riittävästi informaatiota koskien tarkastelun alla olevaa matematiikan alaa. Esim. mallin

$$(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1)$$

avulla voidaan tutkia reaalityöjien aritmetiikkaa ja jopa matemaattista analyysiä. Mallissa

$$(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1)$$

voidaan tutkia rationaalityöjien aritmetiikkaa.

Toisaalta, modernissa tutkimuksessa malleja käytetään paljon laajemmin koodaamaan erilaista (oikeastaan lähes millaista tahansa) informaatiota. Esimerkiksi *tietokannat* on luonnollista tulkita malleiksi. Myös vaikkapa *kuvia* kuvankäsittelyssä voidaan tulkita malleina hyvin suoraviivaisesti. Mallin käsitteen yleisyydestä johtuen mallien avulla mallintaminen on äärimmäisen joustava paradigma jolla on varsin vähän huomionarvoisia rajoituksia. Tästä esimerkkejä myöhemmin.

Mallit

Aloitetaan mallin käsitteen formaalin määritelmän esittely. Määritemää varten tarvitsemme kolme eri luokkaa symboleja: **funktiosymbolit**, **relaationsymbolit** ja **vakiosymbolit**.

Funktiosymboleina käytetään symboleja f, g, h jne. Jokaiseen funktiosymboliin liitetään paikkaluku $n \in \mathbb{Z}_+$.

Relaationsymboleina käytetään symboleja R, S, Q, P jne. Myös relaationsymboleihin liitetään paikkaluku $n \in \mathbb{Z}_+$.

Vakiosymboleina käytetään symboleja c, d jne. Tyypillisesti vakiosymboleihin ei liitetä paikkalukua, vaikka kirjallisuudessa saatetaankin joskus ajatella vakiosymbolejen olevan nollapaikkaisia funktiosymboleja.

Mallit

Olkoon SYMB kaikkien funktio-, relaatio- ja vakiosymbolien joukko. Formaalisti SYMB sisältää numeroituvasti äärettömät joukot funktio-, relaatio- ja vakiosymboleja. Jokaista paikkalukua $n \in \mathbb{Z}_+$ kohden on joukossa SYMB on numeroituvasti ääretön määrä n -paikkaisia funktio- ja relaatio-symboleja.

Aakkosto on joukko $\tau \subseteq \text{SYMB}$. Aakkostoa voidaan kutsua myös **signatuuriksi** (engl. signature). **Algebraallinen aakkosto** koostuu ainoastaan funktio- ja vakiosymboleista. **Relationaalinen aakkosto** koostuu vain relaationsymboleista. (Joskus kirjallisuudessa relationaalisella aakkostolla viitataan aakkostoon, jossa saa olla relaatio- ja vakiosymboleja. Tällöin käytetään myös termiä “purely relational vocabulary” viittaamaan aakkostoon, jossa on vain relaationsymboleja.)

Aakkostoja merkitään symboleilla τ ja σ .

Mallit

Määritelmä 1.17

Olkoon τ aakkosto. τ -**malli** $\mathfrak{M}$ on pari (M, T) , missä

1. M on epätyhjä joukko. Joukkoa M kutsutaan mallin $\mathfrak{M}$ **domainiksi** tai **universumiksi**.
2. T on funktio jonka domaini on τ ja joka kuvaa
 - ▶ jokaisen n -paikkaisen relaatiotymbolin $R \in \tau$ relatioksi $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$ joukossa M ,
 - ▶ jokaisen n -paikkaisen funktiotymbolin $f \in \tau$ funktioksi $f^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$ joukossa M ,
 - ▶ jokaisen vakiotymbolin $c \in \tau$ alkioksi $c^{\mathfrak{M}} \in M$.

Tässä vaiheessa on hyvä huomautta, että relaatioista voidaan käyttää myös vaihtoehtoisia termiä **predikaatti**. Relaatiotymboleja voi kutsua myös **predikaattisymboleiksi**. Termin “predikaatti” käyttö on varsin yleistä etenkin yksipaikkaisista relaatioista puhuttaessa.

Mallit

Malleja merkitään tavallisesti fraktuurakirjaimilla $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jne. Noudatamme myös konventiota, jossa mäiden mallein domainit voidaan merkitä vastavalla kirjaimella A , B , M jne. Mallin domainiin voidaan viitata myös kirjoittamalla esim. $dom(\mathfrak{M})$.

Käsin kirjoitettaessa malleja voi merkitä millä tahansa riittävän selkeällä tavalla. Yksi mahdollisuus on merkitä malleja kirjaimilla M , A , B jne. ja vastaavia domaineja kirjoittamalla $dom(M)$, $dom(A)$, $dom(B)$ jne. Pääasia on, että asiayhteydestä selviää mitä tarkoitetaan.

Models

Esimerkki 1.18

Palautetaan mieleen rakenne $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{R}})$. Tämä rakenne on malli. Tiukasti ottaen tämä malli pitäisi esittää parina $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, T)$ missä kuvauksen T domaini on $\{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ ja seuraavat ehdot täyttyvät.

1. $T(+)=+^{\mathfrak{R}}$ on kaksipaikkainen summafunktio joukossa $\mathbb{R}$. Huomaa, että $+$ on funktiosymboli ja $+^{\mathfrak{R}}$ on sitä vastaava funktio.
2. $T(\cdot)=\cdot^{\mathfrak{R}}$ on kaksipaikkainen tulofunktio joukossa $\mathbb{R}$. Tässä $\cdot$ on funktiosymboli ja $\cdot^{\mathfrak{R}}$ vastaava funktio.
3. $T(0)=0^{\mathfrak{R}} \in \mathbb{R}$ on nolla-alkio joukossa $\mathbb{R}$. Tässä 0 on vakiosymboli ja $0^{\mathfrak{R}}$ vastaava vakio joukossa $\mathbb{R}$.
4. $T(1)=1^{\mathfrak{R}} \in \mathbb{R}$ ykkösalkio joukossa $\mathbb{R}$. Tässä 1 on vakiosymboli ja $1^{\mathfrak{R}}$ vastaava vakio joukossa $\mathbb{R}$.
5. $T(\leq)=\leq^{\mathfrak{R}}=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$, missä $\leq$ on relaatiot symboli ja $\leq^{\mathfrak{R}}$ vastaava kaksipaikkainen relaatio.

Mallit

Vaikka mallien formaali esitys on hyödyllinen logiikan alkeita koskevissa esityksissä, on harvoin tarpeen olla yhtä muodollinen kuin yllä olevassa esimerkissä. Tavallisesti riittää puhua mallista $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{R}})$ parin $(\mathfrak{R}, \mathcal{T})$ sijaan. Itse asiassa, tyyppillisesti riittävän selvää puhua mallista

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$$

Yleensäkin voimme usein samastaa funktiosymbolin f sitä vastaavan funktion kanssa sen sijaan, että käyttäisimme merkintää $f^{\mathfrak{M}}$. Vastaava konventio pätee relaatioihin ja vakioihin. Pääasia on, että kontekstista on tarpeeksi selvää, mitä tarkoitetaan. Varsinaisessa tutkimuskirjallisuudessa tietynlainen (sopivasti rajoitettu) oikominen on varsin yleistä.

Mallit



Olkoon $\tau = \{R\}$ aakkosto, joka sisältää yhden kaksipaikkaisen relaationsymbolin R . Kuvassa on malli $(\{a, b, c\}, T)$ missä $T(R) = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$. Voimme myös määritellä tämän mallin esimerkiksi parina $\mathfrak{M} = (M, R^{\mathfrak{M}})$ missä $M = \{a, b, c\}$ ja $R^{\mathfrak{M}} = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$. Voimme jopa määritellä mallin parina $\mathfrak{M} = (M, R)$ missä M on kuten yllä ja

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}.$$

Tässä on esimerkki, jossa käytämme symbolia R viittaamaan sekä kaksipaikkaiseen relaationsymboliin että sitä vastaavaan relaatioon.

Formaalimpi määritelmä on kuitenkin joskus hyödyllinen, joten sitä koskevat konventiot on hyvä pitää mielessä.

Esimerkki 1.19

Tarkastellaan taas malleja $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ja $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$. Näillä malleilla on sama aakkosto $\{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$. Malleilla on kuitenkin eri domainit $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q}$. Domainit ovat molemmissa tapauksissa äärettömiä. Tämä on varsin yleistä klassista matematiikkaa koskevissa tarkasteluissa (poikkeuksena esim. valta-osa graafiteoriaa ja monet algebraan liittyvät tarkastelut).

Mallit

Määritelmä 1.20

Äärellinen malli on malli, jonka domaini ja aakkosto ovat äärellisiä.

Äärellisten mallien teoriassa tutkitaan äärellisiä malleja, joiden aakkosto on relaationaalinen. Funktio- tai vakiosymboleja ei käytetä. Aakkostoa koskeva rajoitus on kuitenkin käytännössä harmiton, sillä (kuten totesimme yllä), n -paikkaiset funktiosymbolit voidaan koodata $(n + 1)$ -paikkaisilla relaationsymboleilla. Selvästi myös vakiosymbolit voidaan koodata yksipaikkaisilla relaationsymboleilla (pakottamalla vakion c koodaava relaatio P yksiöksi $P = \{c\}$).

Laajemmin - myös äärellisten mallien teorian ulkopuolella - usein sovellusten kautta inspiraationsa saavilla logiikan osa-alueilla on varsin yleistä rajoittua äärellisiin malleihin joiden aakkosto on relationaalinen. Tälläkin kurssilla teemme enimmäkseen niin. Syy rajoittua äärellisiin malleihin on hyvin perusteltu: käytännön struktuurit, kuten vaikka tietokannat, ovat aina äärellisiä. Äärellisiin malleihin rajoittuminen tekee teoriasta erilaista, ei vaikeampaa eikä helpompaa.

Mallit

Mallin **mahtavuus** (**koko**, **kardinaliteetti**) $\text{card}(\mathfrak{M})$ on mallin domainin M alkioden lukumäärä. Eli $\text{card}(\mathfrak{M}) = |M|$. Äärettömillä malleilla mallin mahtavuus voi olla ääretön luku (ks. joukko-opin kurssi), mutta tällä kurssilla mahtavuudet ovat lähes poikkeuksetta positiivisia kokonaislukuja.

Mallit

Määritelmä 1.21

Suunnattu graafi (tai **suunnattu verkko**) on malli (V, E) missä V on äärellinen joukko **noodeja** ja $E \subseteq V \times V$ on kaksipaikkainen relaatio jossa ei ole refleksiivisiä luuppeja.

Näin ollen suunnatussa verkossa (V, E) ei ole noodeja $v \in V$ siten, että $(v, v) \in E$. Huom., käytännössä noodeja voi kutsua myös graafin pisteiksi. Jonot $(u, v) \in E$ ovat graafin **suunnattuja särmiä**.

Määritelmä 1.22

Graafi (tai **verkko**) on suunnattu verkko (V, E) jossa E on symmetrinen, eli $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$.

Morfismit

Yksi tärkeimmistä matematiikan käsiteperheistä liittyy *samankaltaisuuden* eli similaarisuuden käsitteeseen. Eri rakenteilla (malleilla) on erilaisia similaarisuuden asteita. Similaarisuutta on luonnollista tarkastella *morfismien* avulla. Tässä morfismilla tarkoitetaan funktiota mallista malliin (tarkemmin, domainilta domainille).

Morfismit

Tarkastelemme aluksi **homomorfismeja**.

Määritelmä 1.23

Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ be τ -malleja. Olkoon $h : A \rightarrow B$ funktio joka kuvaa mallin $\mathfrak{A}$ domainin A mallin $\mathfrak{B}$ domainille B . Funktio h on **homomorfismi** mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ mikäli h toteuttaa seuraavat **homomorfismiehdot**:

1. $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ kaikille vakiosymboleille $c \in \tau$.
2. $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ kaikille n -paikkaisille funktiosymboleille $f \in \tau$ ja kaikille $a_1, \dots, a_n \in A$.
3. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ pätee kaikille $a_1, \dots, a_n \in A$ ja kaikille n -paikkaisille relaatiotalleille $R \in \tau$.

Morfismit

Määritelmä 1.24

Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ be τ -malleja. Olkoon $h : A \rightarrow B$ funktio joka kuvaa mallin $\mathfrak{A}$ domainin A mallin $\mathfrak{B}$ domainille B . Funktio h on **vahva homomorfismi** mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ mikäli h toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ kaikille vakiosymboleille $c \in \tau$.
2. $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ kaikille n -paikkaisille funktiosymboleille $f \in \tau$ ja kaikille $a_1, \dots, a_n \in A$.
3. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ pätee kaikille $a_1, \dots, a_n \in A$ ja kaikille n -paikkaisille relaationsymboleille $R \in \tau$.

Erona homomorfismiin on, että ehto 3 sisältää nyt ekvivalenssin $\Leftrightarrow$ implikaation $\Rightarrow$ sijaan.

Morfismit

Vahva homomorfismi h mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{B}$ on

1. **upotus** jos h on injektio,
2. **isomorphismi** jos h on bijektio.

Mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat **isomorfiset** (merkitään $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) mikäli on olemassa isomorfismi h mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{B}$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa, että $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat oleellisesti sama malli; voimme muodostaa mallin $\mathcal{B}$ mallista $\mathcal{A}$ *korvaamalla* pisteet $a \in A$ mallin $\mathcal{B}$ pisteillä $h(a) \in B$. Muutoin struktuuri pidetään samana.

An isomorphism h mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{A}$ itselleen on **automorfismi**. Homomorfismi h mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{A}$ itselleen on **endomorphismi**.

Mikäli mallilta $\mathcal{A}$ on olemassa upotus h mallille $\mathcal{B}$ sanomme, että $\mathcal{A}$ voidaan upottaa (tai uppoaa) malliin $\mathcal{B}$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa, että malli $\mathcal{B}$ sisältää kopion mallista $\mathcal{A}$.

Morfismit

Määritelmä 1.25

Olkoon $\mathfrak{A}$ τ -malli, missä τ on relationaalinen aakkosto. Olkoon $B \subseteq A$ joukko. Mallin $\mathfrak{A}$ **rajoittuma** (tai **restriktio**) joukkoon B on malli

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \upharpoonright B$$

jonka domaini on B ja ehto

$$R^{\mathfrak{B}} = \{ (a_1, \dots, a_n) \in B^n \mid (a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \}$$

pätee kaikille relaationsymboleille $R \in \tau$.

Määrittelemme, että τ -malli $\mathfrak{C}$ on mallin $\mathfrak{A}$ **alimalli** mikäli on olemassa epätyhjä joukko $C \subseteq A$ siten, että $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \upharpoonright C$. On helppo nähdä, että $\mathfrak{C}$ uppoaa malliin $\mathfrak{A}$.

Määritelmä 1.26

Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ τ -malleja ja τ relationaalinen aakkosto. **Erillinen yhdiste** malleista $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ on τ -malli $\mathfrak{M} \uplus \mathfrak{N}$ jonka domaini on $(M \times \{0\}) \cup (N \times \{1\})$ ja jossa jokainen n -paikkainen $R \in \tau$ on määritelty siten, että

$$R^{\mathfrak{M} \uplus \mathfrak{N}}$$

$$= \{ ((a_1, x), \dots, (a_n, x)) \mid (a_1, \dots, a_n) \in (R^{\mathfrak{M}})^n \cup (R^{\mathfrak{N}})^n \text{ ja } x \in \{0, 1\} \}.$$

Intuiitiivisesti, erillinen yhdiste malleista saadaan ottamalla kopio sekä mallista $\mathfrak{M}$ että mallista $\mathfrak{N}$ ja laittamalla nämä yhdeksi malliksi ilman, että kopioiden domainit leikkaavat.

Määritelmä 1.27

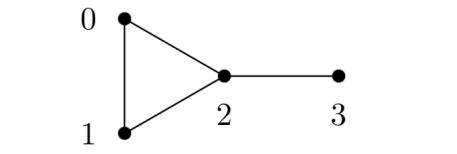
Tarkastellaan kaksipaikkaista relaatiota R ja mallia $\mathfrak{M} = (M, R^{\mathfrak{M}})$. Olkoon $A \subseteq M$ epätyhjä joukko. Tällöin joukon A mallissa $\mathfrak{M}$ **generoima alimalli** on malli $\mathfrak{M} \upharpoonright N$ jonka domaini $N \subseteq M$ on pienin joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot.

1. $A \subseteq N$,
2. Jos $a \in N$ ja $(a, b) \in R^{\mathfrak{M}}$, niin $b \in N$.

Intuitiivisesti, tämä mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli saadaan ottamalla rajoittuma joukkoon, joka koostuu joukosta A relaation $R^{\mathfrak{M}}$ avulla (mahdollisesti useassa askeleessa) saavutettavista pisteistä.

Mallityyppejä

Muistetaan määritelmästä 1.22, että graafi on suunnattu graafi (V, E) jossa kaksipaikkainen relaatio E on symmetrinen. Graafit piirretään tyypillisesti muista vastaavaa aakkostoa olevista malleista poiketen. Tarkastellaan seuraavaa kuvaa.



Kuvassa on graafi $\mathfrak{G}$ jonka domaini on $V = \{0, 1, 2, 3\}$ ja binääirelaatio E määritellään seuraavasti:

$$E = \{ (0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2) \}.$$

Tyypillisesti jonot $(0, 1), (1, 0)$ vastaisivat **kahta nuolta**, yksi alkiosta 0 alkioon 1 ja toinen alkiosta 1 alkioon 0. Graafejja voi toki piirtää tähänkin tapaan, mutta yllä esitelty tapa yksinkertaistaa kuvia.