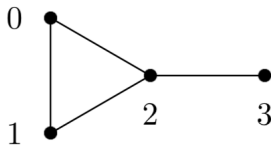


Logiikan uusimpia suuntauksia

1.2 Lisää mallin käsitteestä

Mallityyppejä

Graafiteorian kontekstissa graafi



määritellään tyypillisesti parina

$$(\{0, 1, 2, 3\}, \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}).$$

Tässä jonopari $(0, 1)$, $(1, 0)$ on korvattu järjestämättömällä parilla $\{0, 1\}$, jne. Tällainen järjestämätön pari $\{0, 1\}$ on **särmä**.

Tällä kurssilla yllä oleva graafi kuitenkin esitetään edellisellä slidellä annetulla tavalla. Syy tähän on, että graafiteorian tapa ei ole relationaalinen malli, vaikka se koodautuukin relationaaliseksi malliksi hyvin yksinkertaisella tavalla. Yleisestikin tutkimuskirjallisuutta luettaessa on hyvä olla tietoinen siitä, että konventiot vaihtelevat suurestikin.

Huomautettakoon vielä, että myös n -paikkaisen relaation R jonoja

$$(a_1, \dots, a_n)$$

voi kutsua särmiksi graafiteorian terminologian mukaisesti. Toinen mahdollinen nimitys jonolle $(a_1, \dots, a_n)$ on *tuple* (tai n -paikkainen *tuple*). Terminologian liittyen tärkeintä on, että asiayhteydestä on selvä, mitä tarkoitetaan.

Mallityyppejä

Olkoon I joukko indeksejä ja R kaksipaikkainen relaatiosymboli. Määritellään aakkosto $\tau = \{P_i \mid i \in I\} \cup \{R\}$ missä jokainen P_i on yksipaikkainen symboli. **Kripkemalli** suhteessa aakkostoon τ on malli

$$(W, R, (P_i)_{i \in I}).$$

Alkioita $w \in W$ domainissa W nimitetään termillä **maailma**, eli siis jokainen $w \in W$ on *maailma*. Tämä terminologia liittyy Kripke-mallien alkuperäiseen käyttöön *modaalilogiikan* tutkimuksessa, jossa Kripke-malleilla mallinnettiin erilaisia filosofisia käsitteitä (esim. metafyyminen mahdollisuuden käsite ja tiedon käsite).

Mallityyppejä

Myös nk. **transitiosysteemi** on Kripkemalli. Transitiosysteemejä käytetään tietojenkäsittelytieteessä kuvaamaan systeemien kehitystä ajan kuluessa. Transitiosysteemien pisteitä (tai maailmoja) kutsutaan yleensä **tiloiksi**.

Tarkastellaan tilaa u transitiosysteemin $\mathcal{G}$ domainissa. Jos $u \in P_i^{\mathcal{G}}$, niin tulkitsemme, että tila u toteuttaa ominaisuuden P_i . Mikäli $(u, v) \in R^{\mathcal{G}}$, niin tulkitsemme, että tila v on saavutettavista tilasta u yhdessä “aika-askeleessa”.

Huomaa, että Kripke mallin indeksijoukko I voi olla tyhjä. Tällaisen Kripkemallin (tai transitiosysteemin) aakkosto on $\{R\}$. Havaitsemme, että kyseessä on siis suunnattu graafi jos mallin domaini on äärellinen ja R irrefleksiivinen. Tyypillisesti suunnattujen graafien aakkosto on toki $\{E\}$ eikä $\{R\}$, mutta tämä ei ole merkityksellinen ero.

Olkoon (V, R) malli, $R \subseteq V \times V$. **Suunnattu kulku** (engl. directed walk) on epätyhjä jono $(v_1, v_2, \dots)$ pisteitä $v_1, v_2, \dots \in V$ siten, että kaikille v_i, v_{i+1} , pätee $(v_i, v_{i+1}) \in R$. Mikäli jono on tyyppiä $(v_1, \dots, v_n)$, on kyseessä äärellinen kulku. Muuten kyseessä on ääretön kulku, jolloin voimme tulkita jonon myös funktioksi $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow V$ siten, että $f(i) = v_i$.

Suunnattu kulku on **suunnattu polku** mikäli jokainen jonon piste esiintyy jonossa vain kerran. **Suunnattu sykli** on äärellinen jono $(v_1, \dots, v_n, v_1)$ jossa $(v_1, \dots, v_n)$ on suunnattu polku ja $(v_n, v_1) \in R$. (Tässä $n \geq 1$, joten lyhin suunnattu sykli on tyyppiä (v, v) , eli refleksiivinen luuppi.)

Tarkastellaan mallia (V, R) jossa $R \subseteq V \times V$. **Suuntaamaton kulku** on epätyhjä jono $((v_{1,1}, v_{1,2}), (v_{2,1}, v_{2,2}), \dots, (v_{i,1}, v_{i,2}), \dots)$ relaation R tupleja siten, että

1. kaikille $(v_{i,1}, v_{i,2})$ pätee $(v_{i,1}, v_{i,2}) \in R \cup R^{-1}$ ja
2. kaikille $(v_{i,1}, v_{i,2})$ ja $(v_{i+1,1}, v_{i+1,2})$ pätee $v_{i,2} = v_{i+1,1}$.

Jos kulku on tyyppiä

$$((v_{1,1}, v_{1,2}), (v_{2,1}, v_{2,2}), \dots, (v_{i,1}, v_{i,2}), \dots, (v_{n,1}, v_{n,2})),$$

se on äärellinen. Muuten se on ääretön ja voimme koodata sen funktiolla $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow R$ luonnolliseen tapaan.

Mallityyppejä

Malli (V, R) , jossa $R \subseteq V \times V$, on **yhtenäinen** jos kaikille eri pisteille $v \in V$ ja $u \in V$ on olemassa suuntaamaton kulku

$$((v_{1,1}, v_{1,2}), \dots, (v_{n,1}, v_{n,2}))$$

siten, että $u = v_{1,1}$ and $v = v_{n,2}$.

Malli (V, R) on **vahvasti yhtenäinen** jos kaikille eri pisteille $u \in V$ ja $v \in V$ on olemassa suunnattu polku $(u, \dots, v)$.

Mallityyppejä

Suunnattu graafi (V, E) on **suunnattu puu** mikäli seuraavat ehdot toteutuvat.

- ▶ On olemassa alkio $v \in V$ siten, että jokaiselle $u \in V$ on olemassa täsmälleen yksi suunnattu polku $(v_1, \dots, v_n)$ jossa $v_1 = v$ ja $v_n = u$.
- ▶ (V, E) ei sisällä suunnattua sykliä.

Mallityyppejä

Tarkastellaan τ -mallia $\mathfrak{M} = (M, T)$ missä T on funktio, joka antaa tulkinnat symboleille τ . Nyt siis käytämme mallin virallista määritelmää. Olkoon $\sigma \subseteq \tau$. Tällöin σ -mallia $\mathfrak{N} = (M, T \upharpoonright \sigma)$ kutsutaan mallin $\mathfrak{M}$ **σ -reduktiksi**. (Huom., $T \upharpoonright \sigma$ on funktio, joka saadaan funktiosta T rajoittamalla domaini joukoksi σ .)

Intuiitiivisesti, redukti $\mathfrak{N}$ on sama malli kuin alkuperäinen malli $\mathfrak{M}$, mutta antaa kuitenkin tulkinnan vain joillekin alkuperäisen mallin symboleille.

Päin vastoin, mallia $\mathfrak{M}$ kutsutaan mallin $\mathfrak{N}$ **ekspansioksi** aakkostoon τ . (Huomaa, että mallilla voi olla vain yksi redukti annettuun aliaakkostoon mutta monta ekspansiota annettuun laajempaan aakkostoon.)

Mikäli malli $\mathfrak{A}$ on mallin $\mathfrak{B}$ alimalli, kutsutaan mallia $\mathfrak{B}$ mallin $\mathfrak{A}$ **ekstensioksi** (ei siis ekspansioksi). Ekstensiot säilyttävät mallin aakkoston.

Mallityyppejä

Tarkastellaan aakkostoa $\sigma = \tau \cup \{\leq\}$. σ -malli, joka tulkitsee symbolin $\leq$ refleksiiviseksi lineaarijärjestykseksi, on **järjestetty malli**.

Lause 1.1

Olkoon $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ äärellisiä, järjestettyjä σ -malleja. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi isomorfismi $f : M \rightarrow N$ mallista $\mathfrak{M}$ malliin $\mathfrak{N}$.

Todistus. Oletetaan, että on olemassa jokin isomorfismi $f : M \rightarrow N$ mallista $\mathfrak{M}$ malliin $\mathfrak{N}$. Olkoon $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ ja $N = \{n_1, \dots, n_\ell\}$ siten, että

$$\blacktriangleright m_i \leq^{\mathfrak{M}} m_j \quad \Leftrightarrow \quad i \leq j,$$

$$\blacktriangleright n_i \leq^{\mathfrak{N}} n_j \quad \Leftrightarrow \quad i \leq j.$$

Koska f on bijektio, niin $\ell = k$. Täten $N = \{n_1, \dots, n_k\}$. Osoitamme, että $f(m_i) = n_i$ pätee kaikille i . Tästä seuraa, että f on todellakin ainoa isomorfismi mallista $\mathfrak{M}$ malliin $\mathfrak{N}$.

Mallityyppejä

Osoitamme $f(m_i) = n_i$ induktiolla indeksin i suhteen. Aluksi havaitaan, että jos $f(m_1) = n_p$ jollekin $p \neq 1$, niin on olemassa jokin $q > 1$ siten, että $f(m_q) = n_1$. Tällöin pätee $m_1 \leq^{\mathfrak{M}} m_q$ mutta kuitenkin $n_1 = f(m_q) \leq^{\mathfrak{N}} f(m_1) = n_p$ (missä siis $p \neq 1$). Täten $m_1 \leq^{\mathfrak{M}} m_q$ ja $f(m_1) \not\leq^{\mathfrak{N}} f(m_q)$, joten isomorfiaehto ei päde. Täten saimme siis osoitettua, että $f(m_1) = n_1$.

Oletetaan sitten, että $f(m_k) = n_k$ pätee jollekin indeksille k . Nyt, koska f on bijektio, pätee että $f(m_{k+1}) = n_\ell$ jollekin $\ell \geq k+1$. Tehdään vastaoletus, että $\ell > k+1$. Täten $f(m_p) = n_{k+1}$ jollekin $p > k+1$. Täten $m_{k+1} \leq^{\mathfrak{M}} m_p$ ja $f(m_{k+1}) = n_\ell \not\leq^{\mathfrak{N}} n_{k+1} = f(m_p)$, joten isomorfiaehto ei ole voimassa. $\square$

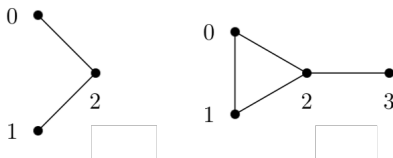
Mallityyppejä

Palautetaan mieleen, että isomorfismi mallilta $\mathfrak{M}$ mallille $\mathfrak{M}$ itselleen on automorfismi. Lause 1.1 osoittaa, että järjestetyn mallin $\mathfrak{M}$ ainoa automorfismi on **triviaali automorfismi** $f : M \rightarrow M$ jolle $f(m) = m$ kaikille $m \in M$.

Määritelmä 1.2

Malli $\mathfrak{M}$ on **rigidi** mikäli sen ainoa automorfismi on triviaali automorfismi.

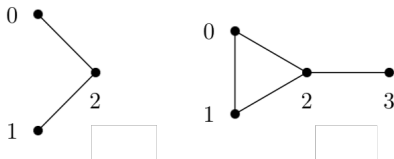
Mallityyppejä



Esimerkki 1.3

Tarkastellaan kuvan graafeja. On helppo nähdä, että nämä graafit eivät ole isomorfisia. Ehkä yksinkertaisin tapa nähdä tämä on havaita, että mallien domainien välillä ei voi olla bijektiota, koska malleilla on eri kardinaliteetti.

On kuitenkin helppo määritellä homomorfismeja ja upotuksia vasemman puoliselta mallilta oikeanpuoliselle mallille. Esimerkiksi kuvaukset $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$, $\{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$, $\{(0, 0), (2, 2), (1, 3)\}$, ja useat muut, ovat homomorfismeja ja upotuksia.



Myös kuvaus $\{(0, 0), (2, 2), (1, 0)\}$ on homomorfismi. Huomaa, että tämä ei ole injektio eikä siis upotus.

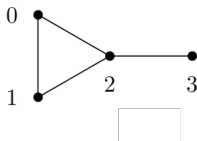
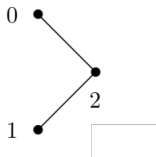
Oikeanpuoleisesta graafista ei ole homomorfismeja vasemmanpuoleiseen. Tehdään vastaoletus, että h on tällainen homomorfismi. Koska

$$(0, 1), (1, 2), (2, 0)$$

kuuluvat oikeanpuoleisen graafin särmärelaatioon, niin

$$(h(0), h(1)), (h(1), h(2)), (h(2), h(0))$$

kuuluvat vastemmanpuoleisen graafin särmärelaatioon. On helppo kuitenkin nähdä, että vasemmanpuoleisessa graafissa ei ole pisteitä x, y, z siten, että $(x, y), (y, z), (z, x)$ kuuluisivat särmärelaatioon.



Hyvänä harjoitustehtävänä on tässä kohtaa pyrkiä osoittamaan, että oikeanpuoleinen graafi ei ole rigidi. Kuinka monta automorfismia kyseisessä graafissa on?

Mallityyppejä

Unaarimallit tai **monadiset mallit** ovat äärellisiä relationaalisia malleja, joiden aakkosto koostuu yksipaikkaisista relaatiosymboleista. Nämä mallit vastaavat *Boolean data-mallia*, jonka toimintaa valaisemme seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 1.4

Tarkastellaan pankin X jotakin tietokantaa $\mathfrak{M}$. Olkoon mallin $\mathfrak{M}$ aakkostona joukko $\tau = \{P_1, P_2, P_3\}$ yksipaikkaisia relaatiosymboleja. (Todellisessa tietokannassa olisi varmasti enemmän symboleja P_i ja siten enemmän informaatiota, mutta pidetään esimerkki lyhyenä). Mallin $\mathfrak{M}$ domainina on $\{1, \dots, n\}$, missä luvun $i \in M$ voi mieltää vaikkapa asiakasnumeroiksi. Oleellisesti siis domainin alkio vastaa asiakasta. Määritellään relaatiot P_i vaikkapa seuraavasti.

1. $P_1 \subseteq M$ sisältää ne asiakkaat, joiden tilin saldo on negatiivinen.
2. $P_2 \subseteq M$ sisältää asiakkaat, jotka ovat hakeneet lainaa, jonka maksukauden kesto ylittää mediaanin.
3. $P_3 \subseteq M$ on niiden asiakkaiden joukko, jotka työskentelevät johtotehtävissä.

Mallityyppejä

Tietokanta X on siis yksinkertainen unaarimalli, joka sisältää tietoa asiakkaista. Tällainen tietokantamalli on sikäli perustavanlaatuinen, että se koostuu ainoastaan elementeistä (tässä asiakkaat) ja niiden ominaisuuksista (yksipaikkaisten relaatioiden muodossa). Myöhemmin tutustumme myös toisenlaiseen tapaan mallintaa tietokantoja.

Unaarimalleja on luonnollista havainnollistaa Venn-diagrammein (piirrä esimerkkejä.)

Mallityyppejä

Boolean data-mallin mukaisiin malleihin voidaan myös luonnollisesti liittää totuusjakaumia. Tätä varten määritellään seuraavaksi **1-tyyppin** (tai **propositionaalisen tyyppin**) käsite.

Olkoon $\tau = \{P_1, \dots, P_n\}$ unaarinen aakkosto, eli aakkosto jonka jokainen relaationsymboli on yksipaikkainen. **Propositionaalinen τ -tyyppi** on joukko $T \subseteq \tau$. Merkitköön $\text{Types}(\tau) = \mathcal{P}(\tau)$ kaikkien propositionaalisten τ -tyyppien joukkoa. Tässä siis $\mathcal{P}$ on potenssijoukko-operaattori.

Teemme seuraavat havainnot koskien propositionaalisia τ -tyyppejä.

1. Propositionaalisia τ -tyyppejä on $2^{|\tau|}$ kappaletta.
2. Jokaisen τ -mallin $\mathfrak{M}$ jokainen alkio $u \in M$ toteuttaa **täsmälleen yhden** propositionaalisen τ tyyppin, eli jokaiselle u on olemassa täsmälleen yksi $T \subseteq \tau$ siten, että

$$u \in P^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow P \in T.$$

Mallityyppejä

Olkoon τ unaarinen aakkosto, kuten edellä. Mikäli τ -mallin $\mathfrak{M}$ alkio u toteuttaa propositionaalisen tyypin T sanomme, että u on tyyppiä T tai u kuuluu tyyppiin T tai että T on u :n tyyppi. Joukkoa

$$T_{\mathfrak{M}} = \{ u \in M \mid T \text{ on } u\text{:n tyyppi} \}$$

kutsumme tyypin T **tulkinnaksi** (**ekstensioksi**, **totuusjoukoksi**) mallissa $\mathfrak{M}$.

Palautetaan seuraavaksi mieleen *osituksen* käsite. Tarkastellaan joukkoa S . Olkoon I joukko indeksejä. Tarkastellaan joukkoja $U_i \subseteq S$, $i \in I$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot.

1. $U_i \neq \emptyset$ pätee kaikille $i \in I$.
2. $U_j \cap U_k = \emptyset$ kaikille indekseille $j, k \in I$ joille $j \neq k$.
3. $S = \bigcup_{i \in I} U_i$

Tällöin sanomme, että joukot U_i muodostavat joukon S **osituksen** (tai **osittavat** S :n).

Mallityypit

Havaitsemme, että jokaiselle monadiselle τ -mallille on olemassa jokin joukko $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}$ propositionaalisia τ -tyyppejä T , joiden tulkinnat $T_{\mathfrak{M}}$ osittavat mallin $\mathfrak{M}$ domainin. Eli siis joukossa $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}$ olevien tyyppien tulkinnat osittavat M :n. Tällöin sanomme, että $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}$ **luo osituksen** malliin $\mathfrak{M}$.

Määritellään funktio $C_{\mathfrak{M}} : \text{Types}(\tau) \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että

$$C_{\mathfrak{M}}(T) = |T_{\mathfrak{M}}|.$$

Kutsutaan funktiota C mallin $\mathfrak{M}$ **karakteristiseksi funktioksi**.

Seuraava lause on helppo todistaa.

Lause 1.5

Olko τ unaarinen relationaalinen aakkosto. Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ äärellisiä τ -malleja. Tällöin $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ jos ja vain jos $C_{\mathfrak{M}} = C_{\mathfrak{N}}$.

Mallityypit

Lauseen 1.5 tulosta voi vielä yksinkertaistaa järjestämällä tyypit, eli määrittelemällä lineaarijärjestys $\leq^{\text{Types}(\tau)} \subseteq \text{Types}(\tau) \times \text{Types}(\tau)$. Tällöin funktio $C_{\mathfrak{M}}$ voidaan koodata jonoksi

$$K_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathbb{N}^{|\text{Types}(\tau)|}$$

joka luettelee luvut $C_{\mathfrak{M}}(T)$ tyyppien T järjestyksessä luonnolliseen tapaan.

Lukujonoa $K_{\mathfrak{M}}$ voi kutsua mallin $\mathfrak{M}$ **karakteristiseksi jonoksi** tai **karakteristiseksi vektoriksi**.

Lause 1.5 siis sanoo, että τ -mallit ovat isomorfiset jos ja vain jos niillä on sama karakteristinen jono. On usein hyödyllistä ajatella τ -malleja yksinkertaisesti karakteristisinä jonoina.

Mallityypit

Äärellisen yksipaikkaisen aakkoston τ määräämälle relaatiolle $P_i^{\mathfrak{M}}$ on luonnollista määritellä **todennäköisyys** $\Pr_{\mathfrak{M}}(P_i)$ äärellisessä τ -mallissa $\mathfrak{M}$,

$$\Pr_{\mathfrak{M}}(P_i) = \frac{|P_i^{\mathfrak{M}}|}{|M|}.$$

Tämä vastaa todennäköisyyttä, että mallin mielivaltaisesti valittu alkio toteuttaa relaation P_i koodaaman ominaisuuden.

Tämä ajattelu laajenee luonnollisesti tyypeihin. Olkoon T propositionaalinen τ -tyyppi. Määrittelemme, että

$$\Pr_{\mathfrak{M}}(T) = \frac{|T^{\mathfrak{M}}|}{|M|}.$$

Harjoitustehtävä: kirjoita ja osoita oikeaksi kaava, jolla saadaan laskettua $\Pr_{\mathfrak{M}}(T)$ kun tiedetään luvut $\Pr_{\mathfrak{M}}(P_i)$ kaikille $P_i \in \tau$. Toisin sanoen, ilmaise $\Pr_{\mathfrak{M}}(T)$ lukujen $\Pr_{\mathfrak{M}}(P_i)$ avulla. Toinen vastaavat tehtävä: osoita, että

$$\sum_{T \in \text{Types}(\tau)} \Pr_{\mathfrak{M}}(T) = 1.$$

Mallityypit

Määritellään seuraavaksi **sanamallin** käsite. Määritellään sitä ennen asiaan liittyviä apu- ja muita käsitteitä.

Olkoon S äärellinen joukko symboleja. Merkinnällä S^* viittaamme symbolijoukon S generoimien, äärellisten **merkkijonojen** eli **sanojen** joukkoon. Esim. jos $S = \{a, b\}$, niin

$$S^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, abb, \dots\}$$

missä ϵ on nk. **tyhjä merkkijono** eli nolla symbolia sisältävä sana.

Joukon S^* alkioita voidaan tarvittaessa kutsua myös **S -sanoiksi** tai **S -merkkijonoiksi**.

Merkkijonojen $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ **konkatenaatio** $\bar{u} \cdot \bar{v}$ on uusi merkkijono, joka saadaan kirjoittamalla ensin $\bar{u}$ ja heti perään (ilman väliä) jono $\bar{v}$. Täten esimerkiksi $01\cdot00 = 0100$. Mikäli $s \in S$ on aakkoston S symboli ja $n \in \mathbb{Z}_+$, tarkoitetaan merkinnällä s^n sanaa, joka saadaan kirjoittamalla symboli s yhteensä n kertaa peräkkäin.

Mallityypit

S -sanat on helppo koodata relationaalisiksi struktuureiksi. Tyhjä merkkijono ϵ kuitenkin aiheuttaa tässä pienen ongelman, koska määritelmän mukaan mallien domaini on aina epätyhjä joukko.

Määrittelemme, että $\mathfrak{M}$ on **sanamalli** symbolijoukon S suhteen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat.

1. Mallin $\mathfrak{M}$ domaini M on äärellinen.
2. Mallin $\mathfrak{M}$ aakkosto on $\{\leq\} \cup \{P_s \mid s \in S\}$, missä symbolit P_s ovat yksipaikkaisia relaatiosymboleja.
3. $\leq^{\mathfrak{M}}$ on refleksiivinen lineaarijärjestys joukossa M . Intuitiivisesti tämä antaa sanan kirjainten järjestyksen.
4. Olkoon $u \in M$ pienin alkio suhteessa järjestykseen $\leq^{\mathfrak{M}}$. Jokaiselle yksipaikkaiselle symbolille P_s pätee $u \notin P_s^{\mathfrak{M}}$.
5. Kaikille muille alkioille $v \in M$ on olemassa täsmälleen yksi yksipaikkainen symboli P_s siten, että $v \in P_s^{\mathfrak{M}}$.

Mallityypit

- ▶ Ehto 4 varmistaa, että järjestyksen $\leq^{\mathfrak{M}}$ suhteen pienin alkio ei toteuta mitään yksipaikkaista predikaattia P_s
- ▶ Ehto 5 taas varmistaa, että muut alkiot toteuttavat täsmälleen yhden yksipaikkaisen predikaatin P_s .

Ehto 4 liittyy tyhjän sanan ϵ koodaamiseen. Se koodataan yhden alkion mallina. Tämä yksi alkio on järjestyksen $\leq$ pienin alkio, eikä siis toteuta mitään predikaattia P_s . Ehto 5 on mielenkiintoisempi. Tarkastellaan vaikkapa $\{a, b\}$ -sanaa $abbb$. Tämä koodataan sanamallina $\mathfrak{A}$ seuraavaan tapaan.

1. Mallin $\mathfrak{A}$ domainissa on viisi alkioita. Merkitköön $a_0, \dots, a_4$ näitä alkioita lueteltuna järjestyksen $\leq^{\mathfrak{A}}$ määräämään tapaan.

2. Nyt

- ▶ $a_1 \in P_a^{\mathfrak{A}}$
- ▶ $a_2 \in P_b^{\mathfrak{A}}$
- ▶ $a_3 \in P_b^{\mathfrak{A}}$
- ▶ $a_4 \in P_b^{\mathfrak{A}}$

Mallityypit

Sanamallit ovat varsin kätevä työkalu. Niiden avulla voimme koodata esim. bittijonot (eli merkit joukossa $\{0, 1\}^*$) relationaalisiksi malleiksi.

Koodaus on helppo tehdä myös toiseen suuntaan; relationaaliset mallit on helppo koodata bittijonoiksi. Tähän on monta tapaa. Esittelemme tässä niistä yhden.

Mallityypit

Olkoon τ relationaalinen aakkosto ja $\mathfrak{A}$ äärellinen τ -malli. Koodataksemme mallin $\mathfrak{A}$ bittijonoksi, määritellään ensin lineaarijärjestys $\leq^A$ mallin $\mathfrak{A}$ domainille A . Mikäli $\mathfrak{A}$ on järjestetty malli ja sisältää valmiiksi lineaarijärjestyksen $\leq^{\mathfrak{A}}$, käytämme sitä. Muutoin järjestys $\leq^A$ valitaan mielivaltaisesti. Merkitkään $<^A$ järjestyksen $\leq^A$ irrefleksiivistä versiota.

Olkoon $R \in \tau$ k -paikkainen relaatiosymboli. Määritellään relaatiolle $R^{\mathfrak{A}}$ koodaus $enc(R^{\mathfrak{A}})$ seuraavaan tapaan. Merkitkään $<^{A^k}$ joukon A^k **leksikografista järjestystä**, eli $(a_1, \dots, a_k) <^{A^k} (a'_1, \dots, a'_k)$ jos ja vain jos on olemassa jokin $i \in \{1, \dots, k\}$ siten, että

1. $a_i <^A a'_i$
2. $a_j = a'_j$ kaikilla $j < i$.

Bittijono $enc(R^{\mathfrak{A}})$ on jono $t \in \{0, 1\}^*$ jolle pätevät seuraavat ehdot.

1. Bittijononossa t on täsmälleen $|A^k|$ bittiä $b_i \in \{0, 1\}$, joten se on muotoa $b_1 \dots b_{|A^k|}$.
2. $b_i = 1$ jos ja vain jos järjestyksen $<^{A^k}$ mukaisesti järjestysluvultaan i oleva jono $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ kuuluu relaatioon $R^{\mathfrak{A}}$. Muuten $b_i = 0$.

Mallityypit

Leksikografinen koodaus $enc(R^{\mathfrak{A}})$ on helpointa hahmottaa konstruoimalla esimerkkejä. Huomautettakoon kuitenkin, että koodaus $enc(R^{\mathfrak{A}})$ on tekninen käsite, jonka yksityiskohtia ei kurssilla varsinaisesti tarvitse muistaa. Riittää ymmärtää, että on olemassa suoraviivainen tapa koodata malli $R^{\mathfrak{A}}$ bittijonoksi.

Mallin $\mathfrak{A}$ koodausta varten tarvitsee määritellä myös järjestys $\leq^{\tau}$ mallin akkostolle τ . Oletetaan, että järjestyksen $\leq^{\tau}$ mukaisesti kirjoitettuna $\tau = \{R_1, \dots, R_m\}$. Mallin $\mathfrak{A}$ koodaus $enc(\mathfrak{A})$ määritellään siten, että

$$enc(\mathfrak{A}) = 0^{|A|} \cdot 1 \cdot enc(R_1^{\mathfrak{A}}) \cdot \dots \cdot enc(R_m^{\mathfrak{A}}).$$

Kunhan järjestys $\leq^{\tau}$ on tiedossa, voidaan yllä olevasta bittijonosta konstruoida malli $\mathfrak{A}'$, joka on isomorfinen mallin $\mathfrak{A}$ kanssa. Mikäli tiedetään järjestys $\leq^{\mathfrak{A}}$, saadaan bittijonosta konstruoitua malli $\mathfrak{A}$ tarkalleen.

Mallityypit

Tarkastellaan vielä **ristikkomalleja** eli **gridimalleja**. Ristikkomallin aakkos-tona voi olla mikä tahansa aakkosto $\tau = \tau_1 \cup \{H, V\}$ missä H ja V ovat kaksipaikkaisia relaationsymboleja ja $\tau_1 \neq \emptyset$ on äärellinen aakkosto, joka sisältää ainoastaan yksipaikkaisia relaationsymboleja.

Ennen yleisen määritelmän kiinnittämistä, tehdään muutama apumääritelmä.

Olkooot $n, k \in \mathbb{Z}_+$ positiivisia kokonaislukuja. Merkitään $[n] = \{1, \dots, n\}$ ja $[k] = \{1, \dots, k\}$ ja $M = [n] \times [k]$. Määritellään lisäksi relaatiot

$$H = \{ ((i, j), (k, j)) \in M \mid i \leq k \}$$

ja

$$V = \{ ((j, i), (j, k)) \in M \mid i \leq k \}.$$

Relaatiot H ja V vastaavat vaaka- ja pystysuuntaisia (eli horisontaalisia ja vertikaalisia) järjestysrelaatiota joukossa M (piirrä kuva). Kutsutaan kolmikkoa (M, H, V) $n \times k$ -ruudukoksi.

Mallityypit

Määritellään sitten, että **ristikkomalli** aakkostolla $\tau = \tau_1 \cup \{H, V\}$ on mikä tahansa malli $\mathfrak{M}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot.

1. On olemassa jotkin $n, k \in \mathbb{Z}_+$ siten, että mallin $\mathfrak{M}$ $\{H, V\}$ -redukti on isomorfinen $n \times k$ -ruudukon kanssa.
2. Predikaatit $P \in \tau_1$ peittävät koko mallin mutta *eivät leikkaa*, eli muodollisemmin,
 - ▶ jokaiselle $u \in \text{dom}(\mathfrak{M})$ on olemassa jokin $P \in \tau_1$ siten, että $u \in P^{\mathfrak{M}}$,
 - ▶ jos $P \in \tau_1$ ja $Q \in \tau_1$ ovat eri symboleja, niin $P^{\mathfrak{M}} \cap Q^{\mathfrak{M}} = \emptyset$.

Siis jokainen piste $u \in M$ toteuttaa täsmälleen yhden predikaatin.

Ristikkomallit soveltuvat vaikkapa kuvankäsittelyyn liittyvään teoretisointiin. Ruudukko vastaa pikselirakennetta ja predikaatit P_i kuvan pisteiden ominaisuuksia (esim. väri tms.)