

Logiikan uusimpia suuntauksia

2. Logiikoista ja luokittelusta

Yleistä

Tässä osiossa esittelemme eri logiikoita ja tutustumme *luokittelun* käsitteeseen.

Luokittelu

Olemme tutkineet mallin käsitettä ja havainneet, että mallien avulla voidaan joustavasti formalisoida mitä erilaisimpia rakenteita. Tarkastellaan seuraavaksi nk. *luokittelun* käsitettä ja liitetään mallin käsite siihen.

Olkoon S joukko. Intuitiivisesti S vastaa tässä jotakin joukkoa, jonka alkioita haluamme luokitella. Käytännön sovelluksessa S voisi olla esimerkiksi kaikkien kuvien joukko, jotka voidaan tuottaa vaikkapa jonkin tietyn tietellisen koejärjestelyn puitteissa.

Haluamme luokitella joukon S alkiot eri luokkiin $v \in V$. Tässä V on kaikkien luokitteluprosessin tuloksena saatavien luokkien joukko. Esimerkiksi, V voisi olla lukujoukko $N = \{0, \dots, n\}$, missä $m \in N$ kertoo kuinka monta henkilöä luokittelun kohteena olevassa kuvassa $k \in S$ on.

Joukon S **luokittelu** joukolla V on yksinkertaisesti funktio $c : S \rightarrow V$.

Luokittelu

Luokittelun määritelmä funktiona $c : S \rightarrow V$ on hyvin yleinen. Käytännön luokittelulle on oltava myös toteutus. Se voi olla esimerkiksi tietokone-ohjelma tai vaikkapa neuroverkko joka laskee funktion $c : S \rightarrow V$. Eli siis, syötteellä $s \in S$, se tuottaa tulosteen $c(s) \in V$.

Luokittelujen teoreettisen tarkastelun mahdollistamiseksi tarvitsemme formalismin, jonka avulla voimme määritellä funktioita $c : S \rightarrow V$ ja sen lisäksi tutkia tarkemmin, miten funktio c voitaisiin käytännössä toteuttaa.

Tällaisena formalismina toimivat erilaiset logiikat. Syötejoukkoina S puolestaan toimivat mallijoukot, eli yksittäiset mallit $\mathfrak{M}$ koodaavat syötteitä luokitteluongelmille.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Määritellään seuraavaksi **ensimmäisen kertaluvun logiikka** eli FO (engl. first-order logic). Tätä varten esitellään ensin joitakin apukäsitteitä.

Olkoon $\text{VAR} = \{ v_i \mid i \in \mathbb{Z}_+ \}$ numeroituvasti ääretön joukko **muuttujasymboleja**, tai **ensimmäisen kertaluvun muuttujasymboleja**. Tyypillisesti käytämme symboleja x, y, z, u, v viittaamaan joukon VAR alkioihin. Näin ollen olioita x, y, z, u, v kutsutaan joskus *metamuuttujiksi*. Myös esim. $x_1, x_2, \dots$ ovat yleisiä metamuuttujia.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon τ aakkosto. Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{C}$ joukon τ funktio- ja vakiosymbolit sisältävät joukot. Aakkostoon τ liitettävien **termien** joukko $\text{Term}(\tau)$ on pienin joukko T siten, että

1. $\text{VAR} \subseteq T$,
2. $\mathcal{C} \subseteq T$,
3. Jos $t_1, \dots, t_n \in T$ ja $f \in \mathcal{F}$ on n -paikkainen funktiosymboli, niin $f(t_1, \dots, t_n) \in T$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Jos $R \in \tau$ on n -paikkainen relaationsymboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat τ -termejä, niin $R(t_1, \dots, t_n)$ on τ -**atomi**. Myös $t_1 = t_2$ on τ -atomi, jota voi kutsua myös **identiteettiatomiksi**.

Huomautettakoon, että identiteettisymboli “=” ei ole relaationsymboli, eikä se kuulu mihinkään aakkostoon τ . Sen sijaan $=$ on *looginen vakio*. Identiteettisymbolia kuitenkin käytetään hyvin samaan tapaan kuin kaksipaikkaisia relaationsymboleja.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Ensimmäisen kertaluvun logiikan τ -kaavojen joukko on pienin joukko T , jolle seuraavat ehdot toteutuvat.

1. Jokainen τ -atomi on joukossa T (joka täten siis sisältää niin identiteettiatomit kuin muutkin atomit).
2. Jos $\varphi \in T$, niin $\neg\varphi \in T$.
3. Jos $\varphi, \psi \in T$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in T$.
4. Jos $\varphi, \psi \in T$, niin $(\varphi \vee \psi) \in T$.
5. Jos $\varphi \in T$ ja $x \in \text{VAR}$, niin $\exists x\varphi \in T$.
6. Jos $\varphi \in T$ ja $x \in \text{VAR}$, niin $\forall x\varphi \in T$.

Käytämme myös tavanomaisia lyhennysmerkintöjä $\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$ ja $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Noudatamme konventiota, jonka nojalla $\neg$ luetaan ennen konnektiiveja $\wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow$, eli siis esimerkiksi $\neg\varphi \wedge \psi$ tarkoittaa “ $(\neg\varphi) \wedge \psi$ ”.

Käytännössä sulkuja voi muutenkin jättää kirjoittamatta, kunhan merkinnöistä on selvää, mitä tarkoitetaan.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Määritelmä 2.1

Olkoon $X \subseteq \text{VAR}$ joukko muuttujia ja $\mathfrak{A}$ malli. Tällöin funktio

$$f : X \rightarrow A$$

on **muuttujien tulkintafunktio** joukolle A (tai mallille $\mathfrak{A}$). Voimme myös kutsua funktiota f yksinkertaisesti **tulkintafunktioksi** tai jopa **tulkinnaksi**.

Intuitiivisesti, tulkintafunktio f antaa tulkinnat joukon X muuttujille mallin $\mathfrak{A}$ domainissa A . (Huomautettakoon tässä, että termillä “tulkinta” on varsin monta vastinetta logiikan alkeisiin liittyvissä yhteyksissä. Tämä ei kuitenkaan aiheuta mitään varsinaista haittaa selkeyden kannalta. Riittävää on, että tilanteen mukaan terminologia muotoillaan siten, että lukija ymmärtää selvästi, mitä tarkoitetaan.)

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon x muuttuja ja $f : X \rightarrow A$ tulkintafunktio joukolle A . Olkoon $a \in A$ alkio. Tällöin $f[x \mapsto a]$ on tulkintafunktio g jonka domaini on $X \cup \{x\}$ ja lisäksi pätee, että jokaiselle $y \in X \cup \{x\}$,

- ▶ $g(y) = f(y)$ jos $y \neq x$,
- ▶ $g(y) = a$ jos $y = x$.

Täten $f[x \mapsto a]$ on muuten sama kuin f mutta kuvaa muuttujan x alkiolle a . Huomaa, että x voi kuulua tai olla kuulumatta funktion f domainiin.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon t τ -termi ja $\mathfrak{A}$ τ -malli. Olkoon $f : X \rightarrow A$ tulkintafunktio. Tällöin $t^{\mathfrak{A},f}$ viittaa alkioon $t^{\mathfrak{A},f} \in A$ seuraavaan tapaan.

- ▶ Jos t on vakiosymboli c , niin $t^{\mathfrak{A},f} = c^{\mathfrak{A}}$.
- ▶ Jos t on muuttujasymboli $x \in X$, niin $t^{\mathfrak{A},f} = f(x)$.
- ▶ Jos t on termi $g(t_1, \dots, t_n)$ missä $g \in \tau$ on funktiosymboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat τ -termejä, niin $t^{\mathfrak{A},f} = g^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A},f}, \dots, t_n^{\mathfrak{A},f})$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

τ -termissä t esiintyvien muuttujien joukko $var(t)$ määritellään seuraavasti.

1. Jos t on muuttujasymboli $x \in \text{VAR}$, niin $var(t) = \{x\}$.
2. Jos t on vakiosymboli c , niin $var(t) = \emptyset$.
3. Jos t on termi $f(t_1, \dots, t_n)$, missä $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä, niin $var(t) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_n)$.

Kaavan φ **vapaiden muuttujien** joukko $free(\varphi)$ määritellään seuraavasti.

1. $free(R(t_1, \dots, t_n)) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_n)$.
2. $free(t_1 = t_2) = var(t_1) \cup var(t_2)$.
3. $free(\neg\varphi) = free(\varphi)$.
4. $free(\varphi \wedge \psi) = free(\varphi \vee \psi) = free(\varphi) \cup free(\psi)$.
5. $free(\exists x\varphi) = free(\forall x\varphi) = free(\varphi) \setminus \{x\}$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Määritelmä 2.2

Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava φ on **lause** jos $\text{free}(\varphi) = \emptyset$.
Kaava φ on **avoin kaava** jos $\text{free}(\varphi) \neq \emptyset$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon $\mathcal{A}$ τ -malli ja $t_1, \dots, t_n$ τ -termejä. Ensimmäisen kertaluvun logiikan FO semantiikka määritellään seuraavasti.

$$\mathcal{A}, f \models R(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}, f}, \dots, t_n^{\mathcal{A}, f}) \in R^{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}, f \models t_1 = t_n \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}, f} = t_n^{\mathcal{A}, f}$$

$$\mathcal{A}, f \models \neg \varphi \Leftrightarrow \text{ei päde, että } \mathcal{A}, f \models \varphi$$

$$\mathcal{A}, f \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{A}, f \models \varphi \text{ ja } \mathcal{A}, f \models \psi$$

$$\mathcal{A}, f \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{A}, f \models \varphi \text{ tai } \mathcal{A}, f \models \psi$$

$$\mathcal{A}, f \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \text{on olemassa } a \in A, \text{ jolle pätee } \mathcal{A}, f[x \mapsto a] \models \varphi$$

$$\mathcal{A}, f \models \forall x \varphi \Leftrightarrow \text{kaikille } a \in A \text{ pätee } \mathcal{A}, f[x \mapsto a] \models \varphi$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Joissain lähteissä kirjoitetaan $\mathcal{A} \models_f \varphi$ merkinnän $\mathcal{A}, f \models \varphi$ sijaan. Kun $f = \emptyset$ (tyhjä tulkintafunktio), kirjoitamme $\mathcal{A} \models \varphi$. Näin ollen, kun φ on lause, voimme kirjoittaa $\mathcal{A} \models \varphi$. Usein myös kirjoitetaan $(\mathcal{A}, f) \models \varphi$ merkinnän $\mathcal{A}, f \models \varphi$ sijaan. Oliota $(\mathcal{A}, f)$ voi kutsua **kaavojen tulkinnaksi** tai (jälleen) **tulkinnaksi**. Jos $\mathcal{A}, f \models \varphi$, niin sanomme, että $(\mathcal{A}, f)$ toteuttaa kaavan φ , tai että $\mathcal{A}$ toteuttaa kaavan φ tulkintafunktiolla f . Jos φ on lause ja $\mathcal{A} \models \varphi$, sanomme, että $\mathcal{A}$ toteuttaa lauseen φ , tai että φ on tosi mallissa $\mathcal{A}$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Esimerkki 2.3

Lause

$$\forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z).$$

sanoo, että binäärirelaatio R on funktio.

Esimerkki 2.4

Avin kaava

$$\exists y (R(x, y) \wedge P(y))$$

sanoo, että x linkittyy relaation R kautta pisteeseen joukossa P .

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Sulkujen jättäminen kirjoittamatta on tyyppillistä käytännön tutkimustyössä. Esimerkiksi atomit $T(x, y, z, u)$, $R(x, y)$, $P(x)$ voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa $Txyzu$, Rxy ja Px . Nyt edellä kirjoitetusta kaavasta

$$\forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z)$$

saadaan yksinkertaisempi muoto

$$\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow y = z).$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon φ kaava. Voimme viitata kaavaan φ myös kirjoittamalla

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

mikäli kaavan φ vapaiden muuttujien joukko on täsmälleen $\{x_1, \dots, x_n\}$. Tässä muuttujat $x_1, \dots, x_n$ ovat *eri* muuttujia, eli siis mitään muuttujasymbolia ei toisteta tässä listassa.

(Huomautettakoon, että kirjallisuudessa on käytössä eriäviä konventioita: merkintä $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ voi myös viitata kaavaan, jonka vapaiden muuttujien joukko on joukon $\{x_1, \dots, x_n\}$ osajoukko.)

Tarkastellaan τ -kaavaa $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ja τ -mallia $\mathcal{A}$. Kaava $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ vastaa relaatiota $\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$ mallissa $\mathcal{A}$ seuraavasti:

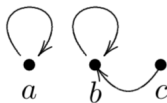
$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A}, \{(x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)\} \models \varphi\}.$$

Tässä $\{(x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)\}$ tarkoittaa tulkitafunktiota $x_i \mapsto a_i$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Esimerkki 2.5

Tarkastellaan alla olevaa mallia $\mathfrak{M} = (M, R)$ jossa R on binäärirelaatio.

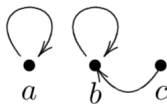


Olkoon $\varphi(x, y)$ kaava $(Rxy \vee Ryx) \wedge x \neq y$, ja olkoon $\psi(x)$ kaava

$$\exists y (Ryx \wedge y \neq x).$$

Tällöin $\varphi^{\mathfrak{M}}(x, y)$ on binäärirelaatio $\{(b, c), (c, b)\}$ ja $\psi^{\mathfrak{M}}(x)$ on yksipaikainen relaatio $\{b\}$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka



Tarkastellaan yllä olevaa mallia $\mathfrak{M} = (M, R)$. Kirjoita (harjoitustehtävä) ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava $\varphi(x, y)$ jossa $(M, \varphi^{\mathfrak{M}}(x, y))$ on alla oleva malli...



Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Tarkastellaan kaavaa

$$\exists x(Qx \wedge \exists y(Rxy \wedge \exists x(Ryx \wedge \exists y(Rxy \wedge Py))))).$$

Huomaa, että tämä kaava “kierrättää muuttujia,” eli vaikka siinä on peräti neljä sisäkkäistä kvanttoriesiintymää, kvantifioituja muuttujasymboleja tarvitaan ainoastaan kaksi.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Olkoon τ aakkosto. Tarkastellaan τ -kaavoja φ ja ψ . Kaavat φ ja ψ ovat **ekvivalentit** (merkitään $\varphi \equiv \psi$) mikäli kaikille τ -malleille $\mathfrak{A}$ ja kaikille tulkintafunktioille $f : X \rightarrow A$ joille $\text{free}(\varphi), \text{free}(\psi) \subseteq X$, pätee

$$(\mathfrak{A}, f) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, f) \models \psi.$$

Näin ollen, jos φ ja ψ ovat lauseita, ne ovat ekvivalentit mikäli kaikille τ -malleille $\mathfrak{A}$ pätee

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi.$$

Lauseet ovat siis ekvivalentit jos ja vain jos ne toteutuvat täsmälleen samoissa malleissa.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Määritelmä 2.6

Tarkastellaan τ -malleja. τ -mallien **ominaisuus** on luokka τ -malleja joka on suljettu isomorfismin suhteen. Toisin sanoen, ominaisuus on τ -malleista koostuva luokka $\mathcal{M}$ siten, että jos $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ on τ -malli joka on isomorfinen τ -mallin $\mathfrak{N}$ kanssa, niin $\mathfrak{N} \in \mathcal{M}$.

Olko R kaksipaikkainen relaatiosymboli. Nyt esimerkiksi $\{R\}$ -mallien ominaisuus “ R on transitiivinen” on niiden $\{R\}$ -mallien luokka, joissa binäärirelaatio R todella on transitiivinen.

Määritelmä 2.7

τ -mallien ominaisuus $\mathcal{M}$ on **määriteltävissä** (tai **ilmaistavissa**) ensimmäisen kertaluvun logiikassa, jos on olemassa kyseisen logiikan τ -lause φ siten, että kaikille τ -malleille $\mathfrak{M}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in \mathcal{M}.$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Määritelmä 2.8

Olkoon $\mathcal{N}$ luokka τ -malleja. τ -mallien ominaisuus $\mathcal{M}$ on **määriteltävissä** (tai **ilmaistavissa**) ensimmäisen kertaluvun logiikassa **suhteessa luokkaan** $\mathcal{N}$ mikäli on olemassa τ -lause φ siten, että kaikille τ -malleille $\mathfrak{M} \in \mathcal{N}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in \mathcal{M}.$$

Usein ominaisuuden määriteltävyys on mahdollista vain suhteessa sopivaan luokkaan $\mathcal{N}$ mutta ei yleisesti.

Olkoon R kaksipaikkainen ja P ja Q yksipaikkaisia. Olkoon $\mathcal{M}$ se $\{R, P, Q\}$ -mallien ominaisuus jonka mukaan “on olemassa suunnattu kulku jostakin pisteestä $u \in P$ johonkin pisteeseen $v \in Q$, $v \neq u$ ”. Ensimmäisen kertaluvun logikassa ei voida määritellä tätä $\{R, P, Q\}$ -mallien ominaisuutta. Emme todista tätä määrittelemättömyystulosta, sillä se ei ole oleellista tämän kurssin osalta. (Tuloksen voi todistaa helposti nk. Ehrenfeucht-Fraïssé -peliä avulla.) Tästä näemme myös, että ensimmäisen kertaluvun logiikassa ei voida ilmaista, että pisteestä x pääsee pisteeseen y kulkemalla relaation R transitiivista sulkeumaa pitkin; muutoin suunnattua kulkua koskeva ominaisuus olisi helppo määritellä.

Tarkastellaan sitten niiden $\{R, P, Q\}$ -mallien luokkaa $\mathcal{N}$, jossa R on transitiivinen. Ominaisuus $\mathcal{M}$ on määriteltävissä suhteessa luokkaan $\mathcal{N}$ lauseella

$$\exists x \exists y (Px \wedge Rxy \wedge Qy \wedge \neg v = u).$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Esimerkki 2.9

Tarkastellaan $\{R\}$ -mallien ominaisuutta " R on transitiivinen". Tämä ominaisuus on määriteltävissä FO-lauseella

$$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz).$$

Olkoon S kolmepaikkainen. $\{S\}$ -mallien ominaisuus " S si sisällä tupleja" on määriteltävissä FO-lauseella

$$\neg \exists x \exists y \exists z Sxyz.$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Yllä tutkimme ominaisuuksien määriteltävyyttä. Yhtä luonnolista on tarkastella *malliluokkien määriteltävyyttä*. Kyseessä on oleellisesti sama käsite kuin ominaisuuksien määriteltävyys.

Määritelmä 2.10

Olkoon $\mathcal{N}$ luokka τ -malleja. Luokka $\mathcal{N}$ on **määriteltävissä** mikäli on olemassa τ -lause φ siten, että kaikille τ -malleille $\mathfrak{M}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in \mathcal{N}.$$

Määritelmä 2.11

Olkoon $\mathcal{N}$ ja $\mathcal{M}$ luokkia τ -malleja siten, että $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Luokka $\mathcal{N}$ on **määriteltävissä** suhteessa luokkaan $\mathcal{M}$ mikäli on olemassa τ -lause φ siten, että kaikille malleille $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in \mathcal{N}.$$

Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Propositio 2.12

Tarkastellaan τ -mallien luokkia $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ joille $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Mikäli τ -mallien ominaisuus $\mathcal{C}$ ei ole määriteltävissä suhteessa luokkaan $\mathcal{M}$, niin se ei ole määriteltävissä suhteessa luokkaan $\mathcal{N}$.

Todistus. Väite on selvä; muodollinen todistus jääköön harjoitukseksi. $\square$

Propositiologiikka

Ensimmäisen kertaluvun logiikka toimii suoraan *malleilla*. Tämä on hyödyllistä monenlaisten sovellusten kannalta. Toisaalta, usein riittää tarkastella mallien sijaan bittijonoja $b \in \{0, 1\}^*$. Tähän on seuraavat syyt.

1. Bittijonot ovat itsessään yksi yleisimmistä informaation mallinnusparadigmoista.
2. Kuten osassa 1 nähtiin, äärelliset relationaaliset mallit on helppo koodata bittijonointa. Toisaalta, bittijonot voi koodata relationaalisina malleina (sanamallit).

Propositiologiikka

Propositiologiikka eli **lauselogiikka** on yksi luonnollisimmista logiikoista joka soveltuu bittijonojen suoraan tarkasteluun. Miten tämä tapahtuu, formalisoidaan myöhemmin. Ensin tutustumme lauselogiikan formalismiin käyttäen lähdettä [1], joka on saatavilla osoitteesta

<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/150660/LehtimäkiIlpo.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

Käymme nyt tästä lähteestä läpi **luvun 2.1**. Lähde [1] perustuu lähteeseen [2]. Myöhemmin kurssilla käymme myös muita osia lähteestä [1] läpi, mutta huomautettakoon, että [1] sisältää myös materiaalia, jota emme käsittele.

[1] Ilpo Lehtimäki. Ilpo Lehtimäki. *Selitettävyydestä propositiologiikassa*. Tampereen yliopisto, 2023.

[2] Reijo Jaakkola, Tomi Janhunen, Antti Kuusisto, Masood F. Rankooh, and Miikka Vilander. *Explainability via short formulas: the case of propositional logic with implementation*. In RCRA 2022, CEUR Workshop Proceedings, pages 64–77. CEUR-WS.org, 2022.

Propositiologiikka

Ennen kuin jatkamme lähteen [1] luvussa 2.1 esitettyjen teemojen kehittelyä eteenpäin, annetaan vielä seuraavat esimerkit konjunkttiivisessa ja disjunkttiivisessa normaalimuodossa olevista kaavoista.

- ▶ Kaava $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q \vee s) \wedge \neg p \wedge (s \vee t) \wedge q$ on konjunktio disjunktioista, joten se on konjunkttiivisessa normaalimuodossa.
- ▶ Kaava $(p \wedge q \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee (s \wedge t) \vee q$ on disjunktio konjunktioista, joten se on disjunkttiivisessa normaalimuodossa.

[1] Ilpo Lehtimäki. Ilpo Lehtimäki. *Selitettävyydestä propositiologiikassa*. Tampereen yliopisto, 2023.

Propositiologiikka

Lähde [1] määritteli myös **kaavan pituuden** käsitteen. Määritellään kaavan pituus vielä tässä rekursiivisesti seuraavaan tapaan: propositiologiikan kaavan φ pituus $I(\varphi)$ kiinnitetään siten, että

1. $I(p) = 1$, kun p on propositiosymboli tarkastellussa aakkostossa Π ,
2. $I(\neg\varphi) = I(\varphi) + 1$,
3. $I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) + I(\psi) + 1$,

Käydään vielä läpi lähteen [1] Lemmaa 2.1.10 valaiseva esimerkki. Tutkitaan aakkostoa $\Pi = \{p, q, r\}$. Nyt esimerkiksi saavan p esitys disjunktiona maksimaalisista konjunktioista on

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Propositiologiikka

Lähteessä [1] propositiologiikka esitettiin suhteessa **aakkostoon** $\Pi \neq \emptyset$, joka sisältää **propositiosymboleja** (tai **lausemuuttujia**) $p_1, \dots, p_n$. Tällä kurssilla riittää tarkastella äärellisiä aakkostoja Π . Huomaa, että mikäli määrittelemme lineaarijärjestyksen $\leq^\Pi$ joukolle Π , niin jokainen valuaatio

$$v : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

vastaa yksikäsitteisesti bittijonoa $\bar{b}_v \in \{0, 1\}^*$ luonnolliseen tapaan. Määritellään tämä tarkemmin. Olkoon $\Pi = \{p_1, \dots, p_n\}$, missä propositiosymbolien alaindeksit kertovat järjestyksen $\leq^\Pi$. Nyt jonon $\bar{b}_v$ bitti i on **1** jos ja vain jos

$$v \models p_i$$

Propositiologiikka

Propositiologiikan mallit (eli valuaatiot $v : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$) on siis luonnollista samastaa bittijonojen kanssa.

Tämän näkökulman mukaan siis Π -ominaisuudet ovat joukkoja

$$L \subseteq \{0, 1\}^*.$$

Tällaisia bittijonojoukkoja voi kutsua myös **kieliksi**.

Merkitköön $S = \{0, 1\}^{|\Pi|}$ kaikkien pituutta $|\Pi|$ olevien bittijonojen joukkoa. Propositiologiikan kaavat siis määrittelevät joukkoja $L \subseteq \{0, 1\}^{|\Pi|}$. Aikaisempaa terminologiaa käyttäen, propositiologiikan kaava määrittelee

joukon S *luokittelun* joukolla $\{true, false\}$.

Formaalisti, propositiologiikan kaava φ määrittelee joukon S luokittelun

$$\varphi_S : S \rightarrow \{0, 1\}$$

siten, että $\forall r \in S (\varphi_S(r) = 1 \Leftrightarrow r \models \varphi)$. Tässä mielessä propositiologiikka on äärimmäisen luonnollinen viitekehys sovellusten kannalta tärkeiden luokitteluongelmien tarkastelussa.

Propositiologiikka

Propositio 2.13

Tarkastellaan äärellistä aakkostoa Π . Propositiologiikka on **ilmaisuvoimaltaan täydellinen**, eli jokaiselle Π -ominaisuudelle on olemassa Π -kaava, joka määrittelee kyseisen ominaisuuden.

Todistus. Olkoon $\Pi = \{p_1, \dots, p_n\}$. Tarkastellaan Π -ominaisuutta $\mathcal{O}$, joka siis on Π -ominaisuuden määritelmän mukaan jokin joukko Π -valuaatioita. Täten siis $\mathcal{O} = \{v_1, \dots, v_m\}$, jossa jokainen v_i on Π -valuaatio. Olkoon φ_{v_i} konjunktio $q_1 \wedge \dots \wedge q_n$ jossa

$$\blacktriangleright q_\ell = p_\ell \text{ jos } v_i(p_\ell) = 1$$

$$\blacktriangleright q_\ell = \neg p_\ell \text{ jos } v_i(p_\ell) = 0$$

(Huom., määrittelimme vastaavan kaavan jo Lemman 2.1.10 todistuksessa lähteessä [1].)

Määritellään sitten kaava $\psi_{\mathcal{O}}$ disjunktiksi

$$\bigvee_{v_i \in \mathcal{O}} \varphi_{v_i}.$$

Nyt on helppo nähdä, että $v_i \models \psi_{\mathcal{O}}$ jos ja vain jos $v_i \in \mathcal{O}$.



Propositiologiikka

Propositiologiikka on siis ilmaisuvoimaltaan täydellinen, mikäli tarkastelemme bittijonoja, joiden pituus on rajoitettu. Tämä on käytännössä hyvä oletus, sillä käytännön ongelmien syötteiden koko tosiaan on - tavalla tai toisella - rajoitettu.

Koska propositiologiikka on ilmaisuvoimaltaan täydellinen, voidaan toki kysyä, miksi mitään muuta luokittelukieltä edes tarvitaan.

Propositiologiikassa on tietty selvä heikkous. Nimittäin luokittelu kahteen (0 tai 1) ei aina riitä. Tästä syystä määrittelemme logiikan käsitteen yleisemmin. Sen jälkeen tutustumme **selitys-** ja **selitettävyysongelmiin**. Aloitetaan seuraavaksi tutustuminen lukuun 3.1. lähteessä [1].

<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/150660/LehtimakiIlpo.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

Lähteet

- [1] Ilpo Lehtimäki. Ilpo Lehtimäki. *Selitettävyydestä propositiologiikassa*. Tampereen yliopisto, 2023.
- [2] Reijo Jaakkola, Tomi Janhunen, Antti Kuusisto, Masood F. Rankooh, and Miikka Vilander. *Explainability via short formulas: the case of propositional logic with implementation*. In RCRA 2022, CEUR Workshop Proceedings, pages 64–77. CEUR-WS.org, 2022.