1 Euklidiset avaruudet $\mathbb{R}^n$

Tässä osiossa käymme läpi Euklidisten avaruuksien $\mathbb{R}^n$ perusominaisuuksia.

Olkoon $n \in \mathbb{N}_+$ positiivinen kokonaisluku. *Euklidinen avaruus* $\mathbb{R}^n$ on joukko

$$\mathbb{R}^n \;=\; \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ jokaisella } i \leq n\ \}.$$

Tässä siis $(x_1, ..., x_n)$ on reaalilukujono, jonka pituus on n. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteet ovat siis vektoreita $x = (x_1, ..., x_n)$. Vektorin $x = (x_1, ..., x_n)$ alkio x_i on x:n i. *koordinaatti*. Luku i on koordinaattipositio, jonka arvo on koordinaatti $x_i \in \mathbb{R}$. Vektorit $x = (x_1, ..., x_n)$ ja $y = (y_1, ..., y_n)$ ovat samat, eli $x = y$, kun $x_i = y_i$ kaikilla i.

Avaruudesta $\mathbb{R}^n$ voidaan muodostaa *reaalinen vektoriavaruus* määrittelemällä vektorien summa

$$x + y \;=\; (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

sekä kertominen reaaliluvulla r

$$rx \;=\; (rx_1, ..., rx_n).$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ nolla-alkio on nollavektori $0 = (0, ..., 0)$.

Vektorien x ja y välinen *etäisyys* määritellään kaavalla

$$d(x, y) \;=\; |x - y| \;=\; \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Vektoreiden $x = (x_1, ..., x_n)$ ja $y = (y_1, ..., y_n)$ *pistetulo* määritellään kaavalla

$$x \cdot y \;=\; x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Pistetulo siis liittää vektoreihin x ja y reaaliluvun $x \cdot y$. Pistetulo toteuttaa yhtälöt

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Vektorin *pituus* eli *normi* määritellään kaavalla

$$|x| \;=\; \sqrt{x \cdot x} \;=\; \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Huomaa, että aina $|x| \geq 0$ ja että $|x| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$, eli kun x on nollavektori.

Kahden vektorin x ja y välinen kulma $\psi \in [0, \pi]$ määritellään kaavalla

$$cos\,\psi = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{|x||y|}, & \text{kun } |x| \neq 0 \neq |y|, \\ 1 & \text{muutoin.} \end{cases} \tag{1}$$

Tämän määritelmän voi motivoida kosinilain avulla; tämä tehdään luennolla taululla.

Huomaa, että kulman ψ olemassaolo vaatii, että ehto

$$\frac{x \cdot y}{|x||y|} \in [-1, 1]$$

toteutuu. Itse asiassa kyseinen ehto toteutuu aina; tämä seuraa Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä:

Propositio 1.1 (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö)**.**

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

Todistus. Mikäli $x = 0$ tai $y = 0$, ehto pätee triviaalisti. Oletetaan, että $x \neq 0 \neq y$. Olkoon $r \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} & 0 \leq |rx + y|^2 \\ = \;& (rx + y) \cdot (rx + y) \\ = \;& r^2 x \cdot x + rx \cdot y + ry \cdot x + y \cdot y \\ = \;& r^2|x|^2 + 2rx \cdot y + |y|^2, \end{aligned}$$

missä käytimme useassa kohtaa aikaisemmin annettuja, pistetuloa koskevia lakeja.

Havaitsemme, että $r^2|x|^2 + 2rx \cdot y + |y|^2 \geq 0$ on toisen asteen polynomi, jonka muuttujana on r. Polynomin kuvaaja on x-akselin yläpuolella oleva ylöspäin aukeava paraabeli, joten polynomilla voi olla korkeintaan yksi nollakohta. Täten polynomin diskriminantti on yhtäsuuri tai pienempi kuin 0, eli

$$2^2(x \cdot y)^2 - 4|x^2||y^2| \leq 0.$$

Täten

$$(x \cdot y)^2 \leq |x|^2|y|^2,$$

joten

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

□

Propositio 1.2. *1.* $|x| = 0$ *täsmälleen silloin kun* $x = 0$*. Lisäksi* $|x| \geq 0$*.*

2. $|rx| = |r||x|$ *kaikilla* $r \in \mathbb{R}$.

3. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(kolmioepäyhtälö)*

Todistus. Kohdan 3 jätämme harjoitustehtäväksi. Kohdat 1 ja 2 ovat selviä. □

Huomaa, että kolmioepäyhtälöstä seuraa suoraan, että

$$|x + y + ..., +w| \ \leq |x| + |y| + ... + |w|.$$

Propositio 1.3.

$$|x| - |y| \ \leq \ ||x| - |y|| \ \leq \ |x + y|.$$

Todistus. Ensimmäinen epäyhtälö on selvä.

Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|,$$

joten

$$|x| - |y| \leq |x + y|.$$

Samaan tapaan päättelemme, että

$$|y| - |x| \leq |x + y|.$$

Näistä kahdesta tuloksesta päättelemme, että

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

□

Vektoriavaruudelle $\mathbb{R}^n$ voidaan määritellä standardit yksikkövektorit tavalliseen tapaan. Vektoriavaruuden standardit *yksikkövektorit* e_i ovat vektorit

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, ..., 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0), \\ &. \\ &. \\ &. \\ e_n &= (0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Jokainen vektori $(x_1, ..., x_n)$ voidaan esittää muodossa

$$x \ = \ x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Propositio 1.4. *Jokaiselle vektorille* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$|x_i| \leq |x| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

Todistus. On selvää, että $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = |x|$.

Koska

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n,$$

niin kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} |x| = |x_1 e_1 + ... + x_n e_n| &\leq |x_1 e_1| + ... + |x_n e_n| \\ &= |x_1||e_1| + ... + |x_n||e_n| = |x_1| + ... + |x_n|. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi käsittelemme suppenemista avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Olkoon $x_1, x_2, ...$ jono pisteitä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, eli

$$x_i = (x_{i,1}, ..., x_{i,n}),\ i = 1, 2, ...$$

Huomaa, että tässä x_i on yksittäinen vektori, ei koordinaatti. Viittaamme vektorijonoon $x_1, x_2, ...$ merkinnällä (x_i).

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektori. Jono (x_i) *suppenee* eli *konvergoi* kohti pistettä x_0, jos

$$|x_i - x_0| \to 0, \tag{2}$$

kun $i \to \infty$. Toisin sanoen, jokaiselle etäisyydelle $r \in \mathbb{R}_+$ on olemassa i siten että kaikille $j > i$ pätee

$$|x_j - x_0| < r.$$

Tällöin sanomme, että piste x_0 on jonon (x_i) *raja-arvo*. Huomaa, että kaavassa 2 käytetään tavallista reaalilukujen raja-arvoa; pisteiden x_i *etäisyys* pisteestä x_0 lähestyy nollaa, kun i lähestyy ääretöntä, eli kasvaa.

Käytämme lyhyempää merkintää $x_i \to x_0$, $i \to \infty$. Joskus kirjoitamme jopa vain että $x_i \to x_0$.

Lause 1.5. *Jono* (x_i) *suppenee kohti pistettä* y *jos ja vain jos jokainen pisteiden* x_i *koordinaattien muodostama reaalilukujono* $(x_{i,j})$ *suppenee kohti* y*:n vastaavaa koordinaattia* y_j*. Tarkemmin,* $x_i \to y$ *jos ja vain jos* $x_{i,j} \to y_j$ *jokaisella koordinaattipositiolla* $j \in \{1, ..., n\}$.

Todistus. Olkoot $u_m, v_m, ..., z_m$ reaalilukujonoja. Tiedämme, että ehdoista $u_m \to 0$, $v_m \to 0$, ..., $z_m \to 0$ seuraa $u_m + v_m + ... + z_m \to 0$. Oletetaan, että

$x_{i,j} \to y_j$ jokaisella j. Täten $|x_{i,j} - y_j| \to 0$, kun $i \to \infty$. Koska tämä pätee kaikilla koordinaattipositioilla j, niin

$$|x_{i,1} - y_1| + ... + |x_{i,n} - y_n| \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Täten Proposition 1.4 nojalla

$$|x_i - y| \leq |x_{i,1} - y_1| + ... + |x_{i,n} - y_n| \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Tästä seuraa ekvivalenssin yksi suunta.

Oletetaan, että $x_i \to y$. Valitaan jokin koordinaattipositio $j \in \{1, ..., n\}$. Proposition 1.4 nojalla

$$|x_{i,j} - y_j| \leq |x_i - y| \to 0.$$

Ekvivalenssin toinen suunta seuraa tästä. □

Jos vektorijonolla (x_i) on raja-arvo, se on yksikäsitteinen Lauseen 1.5 sekä reaalilukujonojen raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla.

Pistejono (x_i) *hajaantuu* eli *divergoi*, jos se ei suppene. Lauseen 1.5 nojalla vektorijono x_i hajaantuu täsmälleen silloin, kun ainakin yksi reaalilukujonoista $(x_{i,j})$, $j \in \{1, ..., n\}$, hajaantuu.

2 $\mathbb{R}^n$:n metristä topologiaa

Jos $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, niin joukkoa

$$B(x,r) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r \,\}$$

kutsutaan $\mathbb{R}^n$:n x-keskiseksi ja r-säteiseksi *avoimeksi palloksi.* Joukko $B(0,1)$ on avoin yksikköpallo.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko. Joukko A on *suljettu*, jos jokaisella suppenevalla jonolla (x_i), missä $x_i \in A$ kaikilla i ja $x_i \to x_0$, pätee $x_0 \in A$. Tällöin sanotaan, että A sisältää kaikki rajapisteensä.

Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos $\mathbb{R}^n \setminus A$ on suljettu.

Lause 2.1. *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin jos ja vain jos jokaisella $x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x,r) \subseteq A$.*

Todistus. Oletetaan, että jokaisella $x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x,r) \subseteq A$. Osoitamme, että $\mathbb{R}^n \setminus A$ on suljettu.

Olkoon (x_i) jono pisteitä $x_i \in \mathbb{R}^n \setminus A$ siten että $x_i \to x_0$. Osoitetaan, että $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Tehdään vastaoletus, että $x_0 \in A$. Täten olettamuksemme nojalla $B(x_0,r) \subseteq A$ jollakin $r > 0$. Koska $x_i \in \mathbb{R}^n \setminus A$ pätee kaikilla i, niin $x_i \notin B(x_0,r)$ pätee kaikilla i. Näin ollen $|x_i - x_0| \geq r$ kaikilla i, joten luvulle r ei lyödy sellaista positiivista kokonaislukua k, että $|x_j - x_0| < r$ kaikilla $j > k$. Täten $x_i \not\to x_0$, mikä on ristiriita.

Ekvivalenssin toinen suunta jätetään harjoitustehtäväksi. □

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko. Joukon A *reuna* ∂A on joukko

$$\partial A = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0\Big(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\Big)\ \}.$$

Toisin sanoen, joukon A reuna ∂A on joukko, jonka jokaisen pisteen jokainen palloympäristö leikkaa sekä joukkoa A että joukon A komplementtia. Jos joukko A on suljettu, niin $\partial A \subseteq A$ (harjoitustehtävä). Toisaalta, Lauseen 2.1 nojalla, jos A on avoin, niin reunan ∂A pisteet eivät koskaan ole joukon A pisteitä.

Lause 2.2. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko. Tällöin reuna ∂A on suljettu ja joukko $A \cup \partial A$ on suljettu.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Joukkoa $\partial A \cup A$ kutsutaan joukon A *sulkeumaksi.* Merkintä $\overline{A}$ tarkoittaa joukkoa $\partial A \cup A$.

Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *rajoitettu*, jos on olemassa sellainen reaaliluku r, että $A \subseteq B(0, r)$. Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, jos jokaisella jonolla (x_i) siten että $x_i \in A$, on sellainen osajono (x_{i_j}), että $x_{i_j} \to x_0$ ja $x_0 \in A$. Eli jokaisella jonolla A:n pisteitä on osajono, joka konvergoi kohti jotakin $A : n$ pistettä.[1]

Lause 2.3. *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos A on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $a \in A$ piste siten että jollekin $r \in \mathbb{R}$ pätee $B(a, r) \cap A = \{a\}$. Tällöin piste a on joukon A *erakkopiste*.

Funktio $f : A \to \mathbb{R}$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on *reaaliarvoinen funktio* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällaisia funktioita käsiteltäessä auttaa taustaintuition rakentamisessa funktioiden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *kuvaajien* visualisointi. Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

kuvaaja on joukko

$$\{ \ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \}.$$

Yleisemmin, olkoon $n \in \mathbb{N}_+$ ja $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Olkoon $h : C \to \mathbb{R}$ funktio. Funktion h kuvaaja on joukko

$$\{ \ (x_1, ..., x_n, z) \mid (x_1, ..., x_n) \in C, \ \ h(x_1, ..., x_n) = z \ \}.$$

Esimerkki 2.4. Olkoon $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ funktio siten että $f(x) = ln|x|$. Luonnostele funktion f kuvaaja.

[1] Huomaa, että määritelmän mukaan vektorijonot y_i ovat aina äärettömiä jonoja; osajono y_{i_j} on myös vektorijono, joten sekin on määritelmän mukaan ääretön jono.

3 Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa

3.1 Raja-arvot, jatkuvuus ja osittaisderivaatat

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $x_0 \in \overline{A}$ piste, joka ei ole joukon A erakkopiste. Tällöin (ja vain tällöin) funktiolla $f : A \to \mathbb{R}^n$ on *raja-arvo* a pisteessä x_0, jos kaikilla jonoilla (x_i), missä $x_i \in A$, $x_i \to x_0$ ja $x_i \neq x_0$, pätee $f(x_i) \to a$. Funktion f määräämä reaalilukujono $(f(x_i))$ siis suppenee tässä kohti pistettä a, kun (x_i) suppenee kohti pistettä x_0.

Propositio 3.1. *Joukossa A on olemassa jono $x_i \to x_0$, $x_i \neq x_0$, jos ja vain jos x_0 ei ole joukon A erakkopiste ja lisäksi $x_0 \in \overline{A}$.*

Todistus. Jos joukossa A on vaaditut ehdot täyttävä jono ja x_0 on joukon A erakkopiste, saadaan ristiriita, sillä erakkopisteellä x_0 on jokin ympäristö $B(x_0, r)$ siten että $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$. Täten jono (x_i), missä $x_i \in A \backslash \{x_0\}$, ei voi supeta raja-arvonaan x_0. Jos taas $x_0 \notin \overline{A}$, niin $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$. Joukko $\mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$ on suljetun joukon $\overline{A}$ komplementtina avoin, joten Proposition 2.1 nojalla on olemassa jokin avoin pallo $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ johon piste x_0 kuuluu. Koska $A \subseteq \overline{A}$, niin on selvää, että jono (x_i), missä $x_i \in A$, ei voi supeta raja-arvoon x_0.

Toiseen suuntaan, oletetaan että x_0 ei ole joukon A erakkopiste ja $x_0 \in \overline{A}$. Koska $x_0 \in \overline{A}$, niin $x_0 \in A \cup \partial A$, joten jokaisesta pallosta $B(x_0, r)$ lyötyy jokin joukon A piste a', ja koska x_0 ei ole joukon A erakkopiste, löytyy aina sellainen a', joka ei ole x_0. Valitsemalla aina lyhyempiä säteitä r pallolle $B(x_0, r)$, voidaan siis muodostaa jono (x_i) siten että $x_i \in A$, $x_i \neq x_0$ ja $x_i \to x_0$. $\square$

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in A$, jos funktiolla f on raja arvo a pisteessä x_0 ja lisäksi $f(x_0) = a$.

Huomaa, että määritelmiemme nojalla funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ ei ole raja-arvoa joukon A erakkopisteissä, eikä f siis ole jatkuva erakkopisteissään. Kirjallisuudessa on myös toisenlaisia raja-arvon määritelmiä, jotka eroavat yllä annetusta määritelmästä patologisissa tapauksissa, kuten erakkopisteissä.

Merkinnällä

$$lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ a$$

tarkoitamme, että funktiolla f on raja-arvo a pisteessä x_0

Määrittelemme, että funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva joukossa* $B \subseteq A$ jos se on jatkuva jokaisessa joukon B pisteessä.

Tutustumme seuraavaksi *osittaisderivaatan* käsitteeseen. Intuition tasolla usean muuttujan reaaliarvoisen funktion f osittaisderivaatta pisteessä x_0 on tavallinen derivaatta, joka saadaan tarkastelemalla funktion f kulkua pisteessä x_0 vain yhdessä suunnassa. Kaiken lisäksi tämä yksi suunta on aina jonkin kantavektorin e_k määräämä suunta.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Olkoon $x_0 \in A$ jokin piste. Koska A on avoin, niin f on määritelty jossakin avoimessa pallossa $B(x_0, r) \subseteq A$. Tämä seuraa Propositiosta 2.1. Kiinnitetään jokin koordinaattipositio $k \in \{1, ..., n\}$. Funktio, joka kuvaa reaaliluvun h reaaliluvulle $f(x_0 + he_k)$, on määritelty ainakin avoimella välillä $(-r, r)$, sillä f on määritelty pallossa $B(x_0, r)$. Jos on olemassa raja-arvo

$$lim_{\ h\to 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{h},$$

sitä kutsutaan funktion f *osittaisderivaataksi muuttujan* x_k *suhteen pisteessä* x_0. Osittaisderivaattaan muuttujan x_k suhteen pisteessä x_0 viitataan merkinnöillä

$$\partial_k f(x_0) \ = \ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}.$$

Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktio ja $x_0 \in \mathbb{R}^2$ piste. Tarkastellaan funktion g rajoittumaa määrittelyjoukkoon

$$A \ = \ \{\ s \in \mathbb{R}^2 \mid s = x_0 + re_1,\ r \in \mathbb{R}\ \}.$$

Olkoon $p : A \to \mathbb{R}$ funktion g rajoittuma määrittelyjoukkoon A, eli funktio $p : A \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $p(x, y) = g(x, y)$ kaikilla $(x, y) \in A$. Määritellään funktio $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten että

$$q(r) \ = \ g(re_1 + x_{0,2}e_2) \ = \ g(r, x_{0,2}).$$

Funktio q on siis funktio, joka saadaan funktiosta g kiinnittämällä toisen koordinaattiposition koordinaatti arvoon $x_{0,2}$ ja antamalla ensimmäisen koordinaattiposition vaihdella. Oleellisesti q on siis sama kuin p, koska $p(x, y) = q(x)$ kaikilla $(x, y) \in A$.

Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivaatta $q'(x_{0,1})$, jos sellainen on olemassa, saadaan kaavasta

$$\begin{aligned} q'(x_{0,1}) &= lim_{h\to 0} \frac{q(x_{0,1} + h) - q(x_{0,1})}{h} \\ &= lim_{h\to 0} \frac{g(x_{0,1} + h, x_{0,2}) - g(x_{0,1}, x_{0,2})}{h} \\ &= \partial_1 g(x_0). \end{aligned}$$

Havaitsemme, että osittaisderivaatan määrittäminen on oleellisesti tavallisen derivaatan määrittämistä.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Nyt siis $\partial_j f(x_0)$ löydetään tarkastelemalla funktiota

$$t \mapsto f(x_{0,1}, ..., x_{0,j-1}, t, x_{0,j+1}, ..., x_{0,n}),$$

joka on määritelty jollakin avoimella välillä $S = (x_{0,j} - r,\ x_{0,j} + r)$. Olkoon tämä funktio $p : S \to \mathbb{R}$. Nyt $\partial_j f(x_0) = p'(x_{0,j})$.

3.2 Differentioituvuus

3.2.1 Funktioiden määrittely tangenttien ja tangenttitasojen avulla

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka saadaan yhtälöstä

$$f(x) \;=\; q + kx.$$

Tässä $k, q \in \mathbb{R}$. Kyseessä on suora, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, q)$ kautta. Suoran kulmakerroin on k. Intuition tasolla kulmakerroin kertoo suoran muutosnopeuden (ja muutoksen suunnan), kun x muuttuu. Jos esim. liikumme pisteestä $x_0 \in \mathbb{R}$ pisteeseen $x \in \mathbb{R}$, on y-suunnassa tapahtuva muutos

$$k(x - x_0).$$

Tarkastellaan sitten funktiota $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, joka saadaan yhtälöstä

$$f(x, y) \;=\; q + k_1 x + k_2 y.$$

Tässä siis $q, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Tämä yhtälö määrää tason, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, 0, q)$ kautta. Kertoimet k_1 ja k_2 kertovat tason muutosnopeuden z-suunnassa. Kerroin k_1 kertoo muutosnopeuden z-suunnassa x-suuntaisen muutoksen suhteen ja k_2 muutosnopeuden z-suunnassa y-suuntaisen muutoksen suhteen. Huomaa, että voimme kirjoittaa

$$f(x, y) \;=\; q + k_1 x + k_2 y \;=\; q + (k_1, k_2) \cdot (x, y),$$

missä $(k_1, k_2) \cdot (x, y)$ tarkoittaa vektoreiden (k_1, k_2) ja (x, y) tavallista pistetuloa. Jos merkitsemme $\overline{k} = (k_1, k_2)$ ja $\overline{x} = (x, y)$, voimme kirjoittaa tason yhtälön suoran yhtälöä muistuttavaan muotoon[2]

$$f(\overline{x}) \;=\; q + \overline{k} \cdot \overline{x}. \tag{3}$$

Kun liikutaan pisteestä (x_0, y_0) pisteeseen (x, y), on muutos z suunnassa selvästi summa

$$k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0) \;=\; \overline{k} \cdot \big(\,(x, y) - (x_0, y_0)\,\big) \;=\; \overline{k} \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0),$$

missä $\overline{x} = (x, y)$ ja $\overline{x}_0 = (x_0, y_0)$. Termi $k_1(x - x_0)$ antaa z-suunnan muutoksen, joka syntyy liikuttaessa x-suunnassa, ja termi $k_2(y - y_0)$ antaa z-suunnan muutoksen, joka syntyy liikuttaessa y-suunnassa. Vektori $\overline{k}$ on siis

[2]Huomaa, että tässä käytämme selkeyden vuoksi vektoreiden päälleviivausmerkintää, vaikka yleensä emme sitä käytä.

eräänlainen yleistetty kulmakerroin, joka kertoo tason muutosnopeuden sekä x-suunnan että y-suunnan suhteen.

Yleisesti, funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaaja avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$ on n-ulotteinen taso, jos f on muotoa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \;=\; a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \;=\; a_0 + \overline{a} \cdot \overline{x},$$

missä $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ja $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Tarkastellaan funktion kulkua pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Funktiolla g on kulmakerroin $g'(x_0)$ pisteessä x_0. Funktion g pisteen $(x_0, g(x_0))$ kautta kulkevan tangentin yhtälö on

$$y \;=\; g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Olkoon $T \subseteq \mathbb{R}^2$ tämän tangentin kuvaaja. Olkoon $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jonka arvo pisteessä x antaa pisteiden $(x_0, g(x_0))$ ja $(x, g(x))$ kautta kulkevan suoran ja tangenttisuoran T kulmakerrointen erotuksen, eli jos pisteiden $(x_0, g(x_0))$ ja $(x, g(x))$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k(x)$, niin

$$p(x) \;=\; k(x) - g'(x_0).$$

Funktio p siis antaa *virheen* suoran T kulmakertoimessa, kun approksimoidaan funktion g arvoa pisteessä x tangentin T avulla: tangentin yhtälöä käyttämällä saatu arvio funktion g arvolle pisteessä x on $g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$, kun taas oikea arvo pisteessä x on

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + \big(g'(x_0) + p(x)\big)(x - x_0) \\ &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + p(x)(x - x_0) \qquad (4) \end{aligned}$$

Funktio p siis antaa kulmakertoimen virheen jokaisessa pisteessä x. Yhtälön 4 voi myös kirjoittaa muotoon

$$g(x_0 + h) \;=\; g(x_0) + g'(x_0)\,h + h\,p(x_0 + h). \qquad (5)$$

Tätä yhtälöä voidaan vielä yksinkertaistaa käyttämällä virhefunktion p sijasta seuraavalla tavalla määriteltyä, jossakin mielessä luonnollisempaa virhefunktiota v: määritellään $v(h) = p(x_0 + h)$ kun h on positiivinen, ja $v(h) = -p(x_0 + h)$ kun h on negatiivinen. Tällä uudella virhefunktiolla v on *oleellisesti* sama rooli kuin virhefunktiolla p. Yhtälö 5 saadaan nyt kuitenkin seuraavaan yksinkertaiseen muotoon:

$$g(x_0 + h) \;=\; g(x_0) + g'(x_0)\,h + |h|\; v(h). \qquad (6)$$

Taustaintuitio tämän yhtälön takana on siis *oleellisesti täysin sama* kuin yhtälön 4, kuitenkin sillä erolla että virhefunktio v toimii hieman eri tavalla kuin virhefunktio p: Funktiolla v on se luonnollinen ominaisuus, että se antaa jokaisessa pisteessä h positiivisen arvon, jos tangentin T antama arvio funktion g arvosta $g(x_0+h)$ on liian pieni, ja negatiivisen arvon, jos tangentin T antama arvio funktion g arvosta $g(x_0+h)$ on liian suuri.[3]

Nyt siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$g(x_0+h) \;=\; g(x_0) + g'(x_0)\,h + |h|\,v(h). \tag{7}$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$g(x) \;=\; g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + |x-x_0|\,v(x-x_0). \tag{8}$$

Suora $y = g(x_0) + g(x_0)(x - x_0)$ on siis funktion g tangentti pisteessä x_0. Reaaliluku $v(x - x_0)$ kertoo miten tangentin kulmakerroin poikkeaa pisteiden $(x_0, g(x_0))$ ja $(x, g(x))$ kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta; funktio v antaa positiivisen arvon, jos tangenttisuoran arvo pisteessä x on pienempi kuin $g(x)$, ja negatiivisen arvon, jos tangenttisuoran arvo pisteessä x on suurempi kuin $g(x)$.

Yhtälöä 8 vastaava yhtälö löytyy samaan tapaan myös funktioille $g : A \to \mathbb{R}$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Tangenttisuoraa vastaa nyt n-ulotteinen tangenttitaso. Olkoon $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio. Olkoon $k \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen yleistetty kulmakerroin. Nyt siis yhtälö $y = a + k \cdot x$ on n-ulotteisen tason yhtälö: tässä siis y viittaa reaalilukuun ja x vektoriin joukossa $\mathbb{R}^n$, katso yhtälö 3. Valitsimme siis yleistetyn kulmakertoimen k mielivaltaisesti, riippumatta funktiosta g. Selvästi on olemassa virhefunktio $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten että yhtälö

$$g(x) \;=\; g(x_0) + k \cdot (x - x_0) \;\; + |x - x_0| v(x - x_0) \tag{9}$$

pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tämän yhtälön oikean puolen kaksi ensimmäistä termiä määräävät tason $t(x) = g(x_0)+k\cdot(x-x_0)$, joka kulkee pisteen $\big(x_0, g(x_0)\big)$ kautta. Tämän tason ei tarvitse olla "tangenttitaso" funktiolle g. Virhefunktio v kuvaa virhettä kulmakertoimessa, kun aproksiomoidaan funktion g arvoa $g(x)$ pisteessä x käyttämällä tasoa $t(x)$ pitkin kulkevaa suoraa. Funktio v siis kertoo miten pisteiden $\big(x_0, t(x_0)\big)$ ja $\big(x, t(x)\big)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin poikkeaa pisteiden $\big(x_0, g(x_0)\big)$ ja $\big(x, g(x)\big)$ kulkevan suoran kulmakertoimesta. Virhefunktio v on tässä täysin analoginen yksiulotteisessa tapauksessa käsitellyn virhefunktion kanssa.

[3] Lisäksi syötteenä funktioon v on intuition tasolla *poikkeama* h pisteestä x_0, kun taas syötteenä funktioon p on intuition tasolla *uusi tarkastelupiste* $x_0 + h$.

3.2.2 Differentioituvuuden määritelmä

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio. Nyt siis tarkastelemme avaruuden $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ funktiota f. Tiedämme, että jos f:llä on derivaatta pistesssä $x \in \mathbb{R}$, niin f on myös jatkuva pisteessä x. Usean muuttujan reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa tilanne on monimutkaisempi.

Tarkastellaan funktiota $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, joka määritellään paloittain annetun ehdon

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = 0, \\ -1 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

perusteella. Havaitsemme, että $\partial_1 g(0,0) = 0$ ja $\partial_2 g(0,0) = 0$, eli funktiolla g on molemmat osittaisderivaatat pisteessä $(0,0)$. On kuitenkin helppo nähdä, että funktiolla g ei ole raja-arvoa pisteessä $(0,0)$. Esim. jos $x_i = (\frac{1}{i}, 0)$, niin $x_i \to 0$ ja $g(x_i) \to 1$, mutta toisaalta, jos $y_i = (\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$, niin $y_i \to 0$ ja $g(y_i) \to -1$. Usean muuttujan reaaliarvoisella funktiolla voi siis olla kaikki osittaiset derivaatat jossakin pisteessä x, vaikka funktio ei olekaan jatkuva pisteessä x. Osittaisten derivaattojen olemassaolo ei kuitenkaan tarkoita, että kyseinen funktio olisi *differentioituva* eli *derivoituva* kyseisessä pisteessä. Alla määrittelemme, mitä tarkoittaa, että usean muuttujan reaaliarvoinen funktio on differentioituva (eli derivoituva) jossakin pisteessä.

Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ funktio ja $x_0 \in D$ piste. Funktio f on *differentioituva* eli *derivoituva* pisteessä x_0, jos on olemassa vektori $k \in \mathbb{R}^n$ ja funktio $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten että kaikilla $x \in D$ pätee

$$f(x) \;=\; f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + |x - x_0|\, v(x - x_0),$$

ja lisäksi pätee $lim_{x \to x_0} v(x - x_0) = 0$. Vertaa tätä yhtälöä yhtälöön 9.

Havaitsemme, että millä tahansa $k \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$f(x) \;=\; f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + |x - x_0|\, v(x - x_0),$$

kun määritellään

$$v(x - x_0) \;=\; \frac{f(x) - f(x_0) - k \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|},$$

kun $x \neq x_0$ ja $v(x - x_0) = 0$ kun $x = x_0$. Oleellinen osa funktion f differentioituvuuden määritelmää onkin ehto $lim_{x \to x_0} v(x - x_0) = 0$. Intuition tasolla, funktio f on differentioituva pisteessä x_0, jos jokin taso $t(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$ antaa arvion funktion f arvolle $f(x)$ pisteessä x siten että tason määräämän suoran kulmakertoimen virhe $v(x - x_0)$ lähestyy nollaa, kun x lähestyy pistettä x_0. Tason t kulku on siis sitä lähempänä funktion g kulkua, mitä lähemmäksi pistettä x_0 tullaan.

Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$, missä $D \subseteq \mathbb{R}^n$, derivoituva pisteessä x_0. Toisin sanoen nyt on olemassa $k \in \mathbb{R}^n$ ja funktio $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten että

$$f(x) \;=\; f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + |x - x_0|\, v(x - x_0),$$

ja lisäksi $v(x - x_0) \to 0$ kun $x \to x_0$. Vektoria k kutsutaan funktion f *gradientiksi* pisteessä x_0. Merkintä $\nabla f(x_0)$ tarkoittaa funktion f gradienttia k pisteeessä x_0.

Gradientti $\nabla f(x_0)$ on siis vektori. Havaitsemme, että kaava

$$h \mapsto \nabla f(x_0) \cdot h$$

määrittelee lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten että

$$L(h) = \nabla f(x_0) \cdot h.$$

Merkintä $f'(x_0)$ tarkoittaa lineaarikuvausta L. Toisin sanoen,

$$f'(x_0)(h) \;=\; \nabla f(x_0) \cdot h \;=\; L(h).$$

Huomaa, että $f'(x_0)$ on yleistetty kulmakerroin.

3.2.3 Gradientin ominaisuuksia

Lause 3.2. *Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : D \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio pisteessä $x_0 \in D$. Tällöin $\partial_j f(x_0)$ on olemassa kaikilla $j \leq n$, ja*

$$\nabla f(x_0) \;=\; (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), ..., \partial_n f(x_0)).$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Havaitsemme, että jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0, niin Lauseen 3.2 nojalla differentioituvuuden määritelmässä esiintyvä vektori $k = \nabla f(x_0)$, eli gradientti, määräytyy yksikäsitteisesti. Tämä seuraa siitä, että osittaisderivaatat $\partial_j f(x_0)$ ovat yksikäsitteisiä.

Lause 3.3. *Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio. Jos f on differentioituva pisteessä $x_0 \in D$, niin f on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Havaitsimme aikaisemmin, että vaikka funktiolla $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olisikin olemassa molemmat osittaisderivaatat $\partial_1 g(x_0)$ ja $\partial_2 g(x_0)$ jossakin pisteessä x_0, on silti mahdollista että funktio g ei ole jatkuva pisteessä x_0. Täten osittaisderivaattojen olemassa olosta pisteessä x_0 ei seuraa derivoituvuutta pisteessä x_0; muuten päätyisimme ristiriitaan Lauseen 3.3 kanssa.

Tarkastellaan pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$ derivoituvaa reaaliarvoista funktiota f. Kuvaus $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten että

$$t(x) \;=\; f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

määrää tason, jonka voidaan ajatella aproksimoivan kuvausta f pisteen x_0 lähellä mielivaltaisen tarkasti, sitä tarkemmin mitä lähempänä pistettä x_0 ollaan. Tämä johtuu siitä että derivoituvuuden määritelmän nojalla

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + |x - x_0| v(x - x_0),$$

missä $v(x - x_0) \to 0$ kun $x \to x_0$. Kuvauksen f aproksimoituvuus tasokuvauksella t on usein hyödyllinen ominaisuus sovelluksia ajatellen, sillä tasokuvauksia on yleensä helppo käsitellä. Kuvauksen t kuvaajaa kutsutaan funktion f *tangenttitasoksi* pisteessä $(x_0, f(x_0))$.

3.3 Derivointi ja differentioituvuus: sääntöjä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Määritellään että funktio $f : A \to \mathbb{R}$ kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^1(A)$, kun seuraavat ehdot toteutuvat.

1. Kaikki osittaisderivaatat $\partial_j f(x_0)$ ovat olemassa jokaisessa pisteessä $x_0 \in A$.

2. Osittaisderivaattojen määräämät funktiot ovat jatkuvia joukossa A.

Seuraava lause on hyödyllinen tutkittaessa onko jokin annettu funktio derivoituva jossakin annetussa pistejoukossa.

Lause 3.4. *Jos funktio $f : A \to \mathbb{R}$ kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^1(A)$, niin f on derivoituva joukon A jokaisessa pisteessä.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoon $V \subseteq \mathbb{R}$ väli ja $h : A \to V$ ja $g : V \to \mathbb{R}$ funktioita. Tutkitaan yhdistetyn funktion $f = g \circ h$ derivoitumista. (Nyt siis $g \circ h(x) = g(h(x))$ kaikille $x \in A$. Funktion $g \circ h$ määrittelyjoukko on A.)

Määrätään funktio $\partial_1 f$. Osittaisderivaatan määritelmän mukaan

$$\partial_1 f(x_0) \;=\; lim_{t\to 0} \frac{g \circ h(x_0 + te_1) - g \circ h(x_0)}{t}.$$

Koska A on avoin joukko, funktio $\varphi(t) = g \circ h(x_0 + te_1)$ on määritelty jollakin avoimella välillä $(-r, r)$, missä $r > 0$. Käyttämällä tuttua yksiulotteista ketjusääntöä, saadaan

$$\varphi'(0) \;=\; g'(h(x_0 + 0e_1))\, \partial_1 h(x_0 + 0e_1) \;=\; g'(h(x_0))\partial_1 h(x_0).$$

Havaitsemme että lisäksi

$$\partial_1 f(x_0) \;=\; lim_{t\to 0} \frac{g \circ h(x_0 + te_1) - g \circ h(x_0)}{t} \;=\; \varphi'(0)$$

Näin ollen päättelemme, että $\partial_1 f(x_0) = g'(h(x_0))\partial_1 h(x_0)$. Tämä tietenkin vaatii, että derivaatat $g'(h(x_0))$ ja $\partial_1 h(x_0)$ ovat olemassa.

Käsittelimme osittaisderivaattaa $\partial_1 f$. Muut osittaisderivaatat $\partial_i f$ käsitellään samaan tapaan. Johdimme siis säännön

$$\partial_i f(x_0) \;=\; g'(h(x_0))\partial_i h(x_0).$$

Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ avoimia funktioita ja $w : A \to B$ ja $h : B \to \mathbb{R}$ funktioita. Kun $n \geq 2$, niin funktio w on *vektoriarvoinen funktio*. Funktion w

arvot ovat joukossa $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällaisia funktioita voi käsitellä reaaliarvoisten funktioiden avulla. Kantavana ideana tässä on määritellä funktion w *koordinaattifunktiot*, jotka ovat reaaliarvoisia funktioita.

Olkoon $i \leq n$. Nyt funktiolla w on *i:s koordinaattifunktio* $w_i : A \to \mathbb{R}$. Funktio w_i on määritelty siten että kaikilla $x \in A$ pätee

$$w_i(x) \;=\; y_i \;\text{ kun }\; w(x) \;=\; (y_1, ..., y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_n) \;\in B.$$

Eli funktio w_i palauttaa syötteellä $x \in A$ vektorin $w(x)$ i-koordinaatin.

Tarkastellaan funktion $f = h \circ w$ derivoitumista. Voimassa on seuraava lause, jonka todistuksen sivuutamme.

Lause 3.5. *Oletetaan että kaikki koordinaattifunktiot w_i ovat derivoituvia pisteessä $x_0 \in A$ ja funktio h on derivoituva pisteessä $w(x_0)$. Tällöin funktio $f = h \circ w$ on derivoituva pisteessä x_0, ja lisäksi*

$$\partial_i f(x_0) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \partial_j h(w(x_0))\, \partial_i w_j(x_0).$$

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $V \subseteq \mathbb{R}$ väli. Olkoot $g : A \to \mathbb{R}$ ja $u : V \to A$ funktioita. Nyt siis vektoriarvoinen kuvaus u määrittelee koordinaattifunktiot $u_i : V \to \mathbb{R}$. Määrittelemme, että u on jatkuva pisteessä $x \in V$, jos jokainen koordinaattifunktio u_i on jatkuva pisteessä $x \in V$. Funktio u on jatkuva jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in V$. Tällöin kutsumme funktiota u *poluksi.*[4]

Määrittelemme, että funktion u derivaatta pisteessä $x \in V$ on vektori $\big(u_1'(x), ..., u_n'(x)\big)$. Tässä oletetaan että jokainen tavallisista derivaatoista $u_i'(x)$ on olemassa.

Lause 3.6. *Olkoon $x_0 \in V$ piste. Oletetaan että $u'(x_0)$ on olemassa. Oletetaan lisäksi, että $g : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $u(x_0)$. Tarkastellaan funktiota $h = g \circ u : V \to \mathbb{R}$. Funktiolle h pätee*

$$h'(x_0) = \nabla g(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

[4]Funktio u voi esimerkiksi kuvata avoimen välin $(0, 1)$ pisteet avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijatsevan yksiulotteisen käyräsegmentin pisteiksi. Nimitys *polku* on siis varsin osuva nimitys funktiolle u.

3.4 Vektoriarvoisten funktioiden differentioituvuus

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}^p$ funktio. Tässä siis $n, p \in \mathbb{N}_+$. Olkoon $x_0 \in A$. Nyt jokaisella $x \in A$ pätee

$$f(x) \;=\; (f_1(x), ..., f_p(x)),$$

missä funktiot $f_i : A \to \mathbb{R}$ ovat funktion f koordinaattifunktiot. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos jokainen koordinaattifunktio f_i on jatkuva pisteessä x_0. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella joukon A jonolla $x_i \to x_0$ pätee $f(x_i) \to f(x_0)$.

Funktio f on *differentioituva* eli *derivoituva* pisteessä x_0, jos on olemassa lineaarikuvaus $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ja funktio $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ siten että kaikille $x = (x_0 + h) \in A$ pätee

$$f(x_0 + h) \;=\; f(x_0) + K(h) + |h| v(h),$$

missä $v(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin lineaarikuvaukseen K viitataan merkinnällä $f'(x_0)$, eli $K = f'(x_0)$. Muista, että kuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on lineaarikuvaus, jos $L(h + k) = L(h) + L(k)$ ja $L(rh) = rL(h)$ pätee kaikille $h, k \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$.

Seuraava lause todistetaan oleellisesti samoin kuin tapauksessa $p = 1$.

Lause 3.7. *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}^p$ derivoituva pisteessä $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. Nyt*

1. *Funktio f on jatkuva pisteessä x_0.*
2. *Lineaarikuvaus $f'(x_0)$ on yksikäsitteinen.*
3. *Koordinaattifunktiot f_i, $i \leq p$, ovat derivoituvia pisteessä x_0.*

Seuraava lause on yleisempi versio lauseesta 3.2.

Lause 3.8. *Olkoon funktio $f : A \to \mathbb{R}^p$ derivoituva pisteessä $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. Nyt*

$$f'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_n f_2(x_0) \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \dots & \partial_n f_p(x_0) \end{pmatrix}.$$

Todistus. Määritelmän mukaan $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on lineaarikuvaus. Tiedämme, että jokaisella lineaarikuvauksella $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on esitysmatriisi, joka on $(p \times n)$-matriisi. Nyt siis

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ k_{p1} & k_{p2} & \dots & k_{pn} \end{pmatrix}$$

Täten vektoreille $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{aligned} f'(x_0)h &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ k_{p1} & k_{p2} & \dots & k_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \big(k_{11}h_1 + ... + k_{1n}h_n,\ \dots,\ k_{p1}h_1 + ... + k_{pn}h_n\big). \end{aligned}$$

Koska f on derivoituva pisteessä x_0, niin derivoituvuuden määritelmässä esiintyvä ehto

$$f(x_0 + te_1) - f(x_0) = f'(x_0)(te_1) + |te_1|v(te_1),$$

pätee mielivaltaiselle $t \in \mathbb{R}$ siten että $(x_0 + te_1) \in A$. Jakamalla puolittain t:llä ja vetoamalla kuvauksen $f'(x_0)$ lineaarisuuteen, saamme tämän kaavan muotoon

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}\Big(f_1(x_0 + te_1) - f(x_0), ..., f_p(x_0 + te_1) - f_p(x_0)\Big) \\ = \ & f'(x_0)e_1 + \frac{|t|}{t}v(te_1), \end{aligned}$$

missä $t \neq 0$. Koska

$$
\begin{aligned}
& f'(x_0)e_1 + \frac{|t|}{t} v(te_1) \\
= & \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ k_{p1} & k_{p2} & \dots & k_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{|t|}{t} v(te_1) \\
= & (k_{11}, k_{21}, ..., k_{p1}) + \frac{|t|}{t} v(te_1),
\end{aligned}
$$

päättelemme, että

$$
\begin{aligned}
& \Big(\frac{1}{t} \big(f_1(x_0 + te_1)\big) - f(x_0),\ ...,\ \frac{1}{t}\big(f_p(x_0+te_1) - f_p(x_0)\big)\Big) \\
= & (k_{11}, k_{21}, ..., k_{p1}) + \frac{|t|}{t}\, v(te_1).
\end{aligned}
$$

Ottamalla tästä molemmin puolin raja-arvo $lim_{t\to 0}$, ja pitäen mielessä että

$$
lim_{t\to 0} \frac{f_j(x_0 + te_1) + f(x_0)}{t} \;=\; \partial_1 f_j(x_0),
$$

ja lisäksi että $v(te_1) \to 0$ kun $t \to 0$, päättelemme, että

$$
\big(\partial_1 f_1(x_0), \partial_1 f_2(x_0),\ ...,\ \partial_1 f_p(x_0)\big) = (k_{11}, k_{21},\ ...,\ , k_{p1})
$$

Käsittelimme koordinaattisuunnan e_1. Muut suunnat käsitellään samalla tavalla. □

Lause 3.9. *Olkoot funktion $f : A \to \mathbb{R}^p$ koordinaattifunktiot $f_i : A \to \mathbb{R}$ derivoituvia pisteessä $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällöin f on derivoituva pisteessä $x_0 \in A$*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Lauseiden 3.7 ja 3.9 perusteella f on derivoituva pisteessä x_0 jos ja vain jos koordinaattifunktiot f_i ovat derivoituvia pisteessä x_0.

Lause 3.10. *Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to \mathbb{R}^n$ funktioita. Jos f on differentioituva pisteessä x_0 ja g on differentioituva pisteessä $f(x_0)$, niin $g \circ f$ on differentioituva pisteessä x_0. Nyt pätee myös $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Tässä lauseessa siis $g'(f(x_0))f'(x_0)$ tarkoittaa lineaarikuvausta, joka saadaan yhdistämällä lineaarikuvaukset $g'(f(x_0))$ ja $f'(x_0)$. Käytännössä tämä tarkoittaa lineaarikuvausten $g'(f(x_0))$ ja $f'(x_0)$ esitysmatriisien kertomista.

Sivuutamme lauseen 3.10 todistuksen. Aikaisemmin esittämämme ketjusäännöt seuraavat tästä yleisemmästä ketjusäännöstä.

3.5 Suunnattu derivaatta ja geometrinen tulkinta gradientille

Osittaiset derivaatat $\partial_i f(x_0)$ kertovat funktion f kuvaajan ominaisuuksista ainoastaan kantavektorien e_i määräämissä suunnissa. *Suunnatun derivaatan* avulla funktion kulkua voi tarkastella myös muissa suunnissa.

Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, missä $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko. Olkoon $x_0 \in A$ ja $u \in \mathbb{R}^n$, missä $|u| = 1$. Funktion f *suunnattu derivaatta pisteessä* x_0 *suuntaan* u on

$$f'_u(x_0) = \partial_u f(x_0) = lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t},$$

kun kyseinen raja-arvo on olemassa.

Suunnattu derivaatta siis kertoo funktion kuvaajan muutosnopeudesta vektorin u määräämässä suunnassa. Tapauksessa $n = 2$ nähdään selvästi, että suunnattu derivaatta $f'_u(x_0)$ antaa kulmakertoimen funktion f kuvaajan ja suunnan u määräämälle käyrälle pisteessä x_0 ja suunnassa u.

Lause 3.11. *Kun f on derivoituva pisteessä x_0, niin*

$$\partial_u f(x_0) \;=\; \nabla f(x_0) \cdot u,$$

ja

$$|\partial_u f(x_0)| \leq |\nabla f(x_0)|.$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Lause 3.11 paljastaa gradientin keskeisen ja mielenkiintoisen ominaisuuden. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on differentioituva funktio pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Oletetaan lisäksi, että $\nabla f(x_0) \neq 0$. Olkoon u vektori, joka osoittaa samaan suuntaan kuin vektori $\nabla f(x_0)$, ja lisäksi $|u| = 1$. Lauseen 3.11 nojalla nyt pätee

$$\partial_u f(x_0) \;=\; \nabla f(x_0) \cdot u.$$

Olkoon ψ vektorien u ja $\nabla f(x_0)$ välinen kulma, eli $\psi = 0$. Koska pistetulon määritelmän nojalla

$$\nabla f(x_0) \cdot u \;=\; |\nabla f(x_0)||u| \cos\psi \;=\; |\nabla f(x_0)| \cos 0 \;=\; |\nabla f(x_0)|,$$

niin päättelemme, että

$$\partial_u f(x_0) \;=\; |\nabla f(x_0)|.$$

Koska lauseen 3.11 nojalla pätee lisäksi että

$$|\partial_v f(x_0)| \;\leq\; |\nabla f(x_0)|$$

kaikille vektoreille $v \in \mathbb{R}^2$ siten että $|v| = 1$, niin päättelemme, että funktion f kuvaajan kasvunopeus pisteessä x_0 on maksimi vektorin u määrää- mässä suunnassa. Koska valitsimme, että u osoittaa samaan suuntaan vektorin $\nabla f(x_0)$ kanssa, päättelemme että *gradientti* $\nabla f(x_0)$ *osoittaa sen xy-tason suunnan, mihin funktion* f *kuvaaja kasvaa nopeimmin.* Gradientti siis identifioi differentioituvan funktion kuvaajan jyrkimmän kasvusuunnan.

3.6 Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : A \to \mathbb{R}$. Jos osittaisderivaatta $\partial_i f(x)$ on olemassa jokaisessa pisteessä $x \in A$, saadaan funktio $\partial_i f : A \to \mathbb{R}$. Funktio $\partial_i f$ voidaan mahdollisesti myös derivoida toiseen kertaan, esim. muuttujan x_j suhteen. Tällöin muodostuu *toisen kertaluvun osittaisderivaatta* $\partial_j \partial_i f$. Vastaavasti voimme muodostaa toisen kertaluvun osittaisderivaatan $\partial_i \partial_j f$. Otetaan käyttöön merkintä

$$\partial_i \partial_j f \;=\; \partial_{ij} f.$$

Jos funktiolla f on olemassa kaikki toisen kertaluvun derivaatat $\partial_{ij} f : A \to \mathbb{R}$ ja myös tavalliset ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat, ja kaikki funktiot $\partial_{ij} f$ ja $\partial_i f$ ovat jatkuvia joukon A jokaisessa pisteessä, sanomme, että f kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^2(A)$. Vastaavasti, jos funktiolla f on olemassa kaikki kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat ja tätä pienempien kertalukujen osittaisderivaatat, ja nämä kaikki ovat jatkuvia A:ssa, sanomme, että f kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^3(A)$. Jos funktiolla f on olemassa kaikki jokaista kertalukua olevat osittaisderivaatat, ja nämä ovat jatkuvia joukossa A, sanomme, että f kuuluu luokkaan $\mathcal{L}^\infty(A)$.

Lause 3.12. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, $f \in \mathcal{L}^2(A)$. Tällöin $\partial_1 \partial_2 f \;=\; \partial_2 \partial_1 f$.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Lause 3.12 yleistyy tapauksesta $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tapaukseen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ suoraviivaisesti. Oleellisesti sama todistus toimii myös tässä yleisemmässä tapauksessa. Siis seuraava lause pätee.

Lause 3.13. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, $f \in \mathcal{L}^2(A)$. Tällöin $\partial_{ij} f \;=\; \partial_{ji} f$.*

3.7 Ääriarvot

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktiolla f on *lokaali* eli *paikallinen maksimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa jokin $r > 0$ siten että

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ kaikilla } x \in A \cap B(x_0, r).$$

Piste x_0 on *aito* lokaali maksimi, jos yllä oleva epäyhtälö on aito epäyhtälö, kun $x \neq x_0$.

Piste $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa jokin avoin pallo $B(a, r) \subseteq A$. Merkintä *int* A viittaa joukon A sisäpisteiden joukkoon.

Lause 3.14. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Olkoon $x_0 \in A$ joukon A sisäpiste ja funktion f lokaali ääriarvopiste. Oletetaan, että osittaisderivaatta $\partial_i f(x_0)$ on olemassa. Tälloin $\partial_i f(x_0) = 0$.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio siten että $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Pisteet $x \in \mathbb{R}^n$ siten että

$$\nabla f(x) \;=\; (\partial_1 f(x), ..., \partial_n f(x)) \;=\; (0, ..., 0) \;=\; 0,$$

ovat funktion f *kriittisiä pisteitä*, ja kriittisissä pisteissä x saatuja funktion f arvoja $f(x)$ kutsutaan f:n *kriittisiksi arvoiksi*.

Kun $f \in \mathcal{L}^1(A)$, missä A on avoin, niin lauseen 3.14 nojalla funktion f lokaalit ääriarvot ovat funktion f kriittisiä pisteitä.

Käsitellään seuraavaksi tapausta $n = 2$, eli avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukoilla määriteltyjen funktioiden lokaaleja ääriarvoja. Yksityiskohtaiset todistukset sivuutetaan tätä erikoistapausta käsiteltäessä.

Aloitetaan *toisen asteen Taylorin kehitelmästä.*

Lause 3.15. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio siten että $f \in \mathcal{L}^3(A)$. Olkoot $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k) \in A$ pisteitä. Tällöin*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\partial_{11} f(x_0, y_0)h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0)hk + \partial_{22} f(x_0, y_0)k^2\big) \\ &\qquad + (h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}\, V(h, k), \end{aligned}$$

missä $V(h, k)$ on jokin funktio siten että on olemassa jokin avoin kuula $B(0, r)$, jossa V on rajoitettu. Toisin sanoen, on olemassa jokin luku $s \in \mathbb{R}$ siten että $|V(u, v)| < s$ kaikille $(u, v) \in B(0, r)$.

(Sivuutamme tämän lauseen todistuksen.) Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, missä $A \subseteq \mathbb{R}^2$ on avoin joukko ja $f \in \mathcal{L}^3(A)$. Olkoon (x_0, y_0) funktion f kriittinen piste, eli $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Taylorin kaavasta saadaan

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(\partial_{11} f(x_0, y_0) h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0) hk + \partial_{22} f(x_0, y_0) k^2 \big) \\
&\qquad + (h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}\, U(h, k). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Funktio $U(h, k)$ on rajoitettu jossakin kuulassa $B(0, r)$. On helppo osoittaa, että kun $\partial_{11} f(x_0, y_0) > 0$, $\partial_{22} f(x_0, y_0) > 0$, $\partial_{12} f(x_0, y_0) = 0$ ja $(h, k) \to (0, 0)$, niin

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}\, U(h, k)}{\frac{1}{2}\big(\partial_{11} f(x_0, y_0) h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0) hk + \partial_{22} f(x_0, y_0) k^2 \big)} \right| \\
\leq &\left| \frac{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}\, c}{\frac{1}{2}\big(\partial_{11} f(x_0, y_0) h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0) hk + \partial_{22} f(x_0, y_0) k^2 \big)} \right| \to 0,
\end{aligned}
$$

missä $c \in \mathbb{R}$ on jokin vakio (funktio U on rajoitettu pallossa $B(0, r)$). Tällöin on olemassa jokin palloympäristö $B(0, t)$ siten että

$$
|(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}\, U(h, k)| \; < \; |\frac{1}{2}\big(\partial_{11} f(x_0, y_0) h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0) hk + \partial_{22} f(x_0, y_0) k^2\big)|
$$

kaikille $(h, k) \in B(0, t)$. Täten $f(x_0, y_0)$ on lokaali minimi, kun $\partial_{11} f(x_0, y_0) > 0$, $\partial_{12} f(x_0, y_0) = 0$ ja $\partial_{22} f(x_0, y_0) > 0$. On myös muita tapauksia, jossa vastaavanlainen päättely koskien pisteen (x_0, y_0) ääriarvoluonnetta voidaan tehdä. Oleellista on tarkastella termin

$$
\partial_{11} f(x_0, y_0) h^2 + 2\partial_{12} f(x_0, y_0) hk + \partial_{22} f(x_0, y_0) k^2
$$

käyttäytymistä, kun $(h, k) \to 0$.

Tarkastellaan siis polynomia

$$
Q(h, k) \; = \; ah^2 + 2b\, hk + ck^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R},
$$

vertaa kaava 10. Funktion Q kuvaajat ovat puörähdysparaboloidi- tai satulamuotoisia. (Myös esim. funktion $Q(h, k) = 0$ kuvaaja luokitellaan kyseistä muotoa olevaksi.) Lisäksi pätee $Q(0, 0) = 0$. Funktion Q kuvaajan ja tason $h = r \in \mathbb{R}$ kuvaajan leikkaus on aina paraabeli (tai suora). Sama pätee muuttujalle k.

Olkoon $a = \partial_{11} f(x_0, y_0)$, $b = \partial_{12} f(x_0, y_0)$ ja $c = \partial_{22} f(x_0, y_0)$. Funktion f kuvaajan äriarvoluonne pisteessä (x_0, y_0) riippuu vakioiden a, b, c arvoista, esim. näiden vakioiden positiivisuudesta/negatiivisuudesta, etc. On mahdollista tehdä seuraavat johtopäätökset (emme osoita tätä), kun $f \in \mathcal{L}^2(A)$, $f : A \to \mathbb{R}$, A avoin.

1. Piste (x_0, y_0) on aito lokaali minimi, jos pätee että $Q(h,k) > 0$ kun $(h,k) \neq (0,0)$. Sanomme, että Q on *positiivisesti definiitti*, jos $Q(h,k) > 0$ kun $(h,k) \neq (0,0)$.

2. Piste (x_0, y_0) on aito lokaali maksimi, jos pätee että $Q(h,k) < 0$ kun $(h,k) \neq (0,0)$. Sanomme, että Q on *negatiivisesti definiitti*, jos $Q(h,k) < 0$ kun $(h,k) \neq (0,0)$.

3. $Q(h,k)$ on *indefiniitti*, jos se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Tällöin (x_0, y_0) ei ole ääriarvokohta, vaan *satulapiste*.

4. $Q(h,k)$ on *positiivisesti semidefiniitti*, jos $Q(h,k) \geq 0$ kaikilla (h,k) ja lisäksi $Q(h,k) = 0$ jollakin $(h,k) \neq 0$. Tällöin siitä, onko piste (x_0, y_0) lokaali ääriarvo, ei voida suoraan päätellä mitään. Tapaus on tutkittava erikseen.

5. $Q(h,k)$ on *negatiivisesti semidefiniitti*, jos $Q(h,k) \leq 0$ kaikilla (h,k) ja lisäksi $Q(h,k) = 0$ jollakin $(h,k) \neq 0$. Tässäkään tapauksessa siitä, onko piste (x_0, y_0) lokaali ääriarvo, ei voida suoraan päätellä mitään. Tapaus on tutkittava erikseen.

Funktiota $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ kutsutaan *toisen asteen neliömuodoksi*. Voidaan osoittaa (emme osoita), että seuraavat ehdot pätevät.

1. Q on positiivisesti definiitti joss $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$.

2. Q on negatiivisesti definiitti joss $a < 0$ ja $ac - b^2 > 0$.

3. Q on indefiniitti joss $ac - b^2 < 0$.

4. Q on semidefiniitti joss $ac - b^2 = 0$.

Funktiolla f on *absoluuttinen* eli *globaali* minimi pisteessä $x_0 \in A$, jos

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ kaikilla } x \in A.$$

Pisteessä x_0 on aito absoluuttinen minimi, mikäli tässä kaavassa pätee aito epäyhtälö kaikilla $x \neq x_0$. Absoluuttinen maksimi määritellään vastaavalla tavalla.

Lause 3.16. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakti ja epätyhjä joukko. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin funktiolla f on vähintään yksi absoluuttinen minimipiste ja vähintään yksi absoluuttinen maksimipiste.*

Todistus. Käsitellään luennolla. □

3.8 Polut ja pinnat

Määritettelemme, että joukko $V \subseteq \mathbb{R}$ on *väli*, jos kaikille $r, s, t \in \mathbb{R}$ pätee

$$(\, r, t \in V \text{ ja } r \leq s \leq t \,) \;\Rightarrow\; s \in V.$$

Olkoon $V \subseteq \mathbb{R}$ mikä tahansa väli. Jos funktio $f : V \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva, se on *polku*. Sivusimme polun käsitettä jo osiossa 3.3. Välin V ei tarvitse olla avoin joukko. Polkuja käsiteltäessä intuitio on, että esim. polku $g : [0, 4] \to \mathbb{R}^3$ kulkee suuruudeltaan 4 yksikköä (esim. sekuntia) olevan "matkan" funktion g *kuvaa*, eli joukkoa

$$\{\, g(x) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in [0, 4] \,\}$$

pitkin. Matka tehdään avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Matka alkaa pisteestä $g(0)$ ja päättyy pisteeseen $g(4)$. Esim. piste $g(2)$ saavutetaan, kun matkaa on tehty täsmälleen 2 yksikköä (sekuntia). Huomaa, että funktion kuva ei ole sama kuin funktion kuvaaja.

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Olkoon $f : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ polku. Oletetaan, että $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$. Tarkastellaan pistettä $t \in (a, b)$. Huomaa, että $f_1'(t)$ vastaa polun kuvaajan x-suuntaista muutosnopeutta pisteessä $f(t) \in \mathbb{R}^2$. Samaan tapaan, $f_2'(t)$ vastaa polun y-suuntaista muutosnopeutta pisteessä $f(t) \in \mathbb{R}^2$. Kun $f'(t) \neq 0$, vektori $f'(t)$ siis antaa suunnan, jossa polun f kuvan tangentti pisteessä $f(t)$ kulkee. Näin ollen määritettelemme, että polku

$$r \;\mapsto\; f(t) + f'(t)r, \;\; r \in \mathbb{R}$$

on funktion f *tangentin polku* pisteessä $f(t)$, kun $f'(t) \neq 0$. Sama määritelmä pätee myös poluille, joiden maalijoukko on $\mathbb{R}^n$, $n \neq 2$.

Havaitaan että

$$|f'(t)| \;=\; \left(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

joten $|f'(t)|$ voidaan tulkita polun f "kulkijan vauhdiksi" pisteessä $f(t)$. Kulkijan nopeus pisteessä $f(t)$ on vektori $f'(t)$. (Nopeudella on suunta; vauhti on skalaari).

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *avoin neliö*, eli

$$A = (a, b) \times (c, d),$$

missä $a < b$ ja $c < d$. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}^3$ jatkuva funktio. Tällöin funktio f on *A-pinta*. Nimitys johtuu siitä, että funktion f voidaan ajatella määrittelevän 2-ulotteisen "pinnan"

$$\{\; f(x) \;|\; x \in A \;\}$$

avaruuteen $\mathbb{R}^3$.

Kiinnitetään $y_0 \in (c, d)$. Funktio

$$x \mapsto f(x, y_0), \ x \in (a, b)$$

on polku, jonka voidaan ajatella kulkevan funktion f määräämällä pinnalla. Vastaavasti, jos kiinnitetään $x_0 \in (a, b)$, funktio

$$y \mapsto f(x_0, y), \ y \in (c, d)$$

on polku pinnalla f.

3.9 Käänteiskuvauslause

Olkoon $q : A \to B$ jokin funktio ja $C \subseteq A$. Merkintä $q \restriction C$ viittaa funktioon

$$\{ (x, y) \mid x \in C,\ q(x) = y \}.$$

Funktio $q \restriction C$ on funktion q *rajoittuma* joukkoon C.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Tarkastellaan funktioita $f : A \to \mathbb{R}^n$, ja kysymystä, onko funktiolla f olemassa *käänteiskuvaus*, eli kuvaus

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

siten että $f^{-1}(f(x)) = x$ kaikille $x \in A$. Tässä siis

$$f(A) \ = \ \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

Huomaa, että käänteiskuvauksen olemassa olo on yhtäpitävää sen kanssa että $f : A \to f(A)$ on bijektio.

Sanomme, että funktio f on *lokaalisti kääntyvä pisteessä* $x_0 \in A$, jos on olemassa jokin palloympäristö $B(x_0, r)$ siten että funktio

$$f \restriction B(x_0, r) \ : \ B(x_0, r) \to f(B(x_0, r))$$

on bijektio. Tässä siis

$$f(B(x_0, r)) \ = \ \{ f(x) \mid x \in B(x_0, r) \}.$$

Funktio f on *lokaalisti kääntyvä*, jos se on lokaalisti kääntyvä jokaisessa pisteessä $x_0 \in A$.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : A \to \mathbb{R}^n$ kuvaus. Oletetaan, että kuvaus f on derivoituva pisteessä $x_0 \in A$. Määritellään kuvaus $K : A \to \mathbb{R}^n$ siten että

$$K(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sanomme, että kuvaus K on funktion f *aproksimaatiokuvaus* pisteessä x_0.

Propositio 3.17. *Jos kuvauksen $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determinantille $det(f'(x_0))$ pätee $det(f'(x_0)) \neq 0$, niin aproksimaatiokuvauksella K on käänteiskuvaus*

$$K^{-1}(y) \ = \ x_0 + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x_0)).$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Proposition 3.17 nojalla vaikuttaisi siltä, että jos funktiolle $g : A \to \mathbb{R}^n$ pätee $det(g'(x_0)) \neq 0$ pisteessä $x_0 \in A$, niin tällöin funktio g on lokaalisti kääntyvä pisteessä x_0. Lisäksi vaikuttaisi, että jos $det(g'(x)) \neq 0$ jokaisessa pisteessä $x \in A$, niin tällöin g on lokaalisti kääntyvä; seuraava lause osoittaakin tämän. Sivuutamme lauseeen todistuksen.

Lause 3.18. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : A \to \mathbb{R}^n$ kuvaus, $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Oletetaan, että kaikilla $x \in A$ pätee $det(f'(x)) \neq 0$. Tällöin f on lokaalisti kääntyvä. Funktiolla f on siis jokaisessa pisteessä x jokin ympäristö $B(x, r)$ siten että funktio*

$$f \restriction B(x, r) \ : \ B(x, r) \to f(B(x, r))$$

on bijektio. Joukko $f(B(x_0, r))$ on avoin. Funktio

$$f^{-1} \ = \ \{ \ (y, x) \mid (x, y) \in \ f \restriction B(x, r) \ \}$$

on luokassa $\mathcal{L}^1(f(B(x, r)))$. Lisäksi pätee

$$f^{-1}{}'(f(y)) \ = \ (f'(y))^{-1}.$$

Tämä lause on nk. *käänteiskuvauslause*. Determinanttia $det(f'(x))$ kutsutaan funktion f *Jacobin determinantiksi* eli *jacobiaaniksi* pisteessä x.

3.10 Lagrangen kertoimet

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Joukko

$$\{ \, x \in A \mid f(x) = c \, \}$$

on funktion f *tasa-arvo joukko.*

Lause 3.19. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ avoin ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Olkoon $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ polku. Olkoon $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, missä $x, y : (a,b) \to \mathbb{R}$ ovat funktioita siten että $f(x(t), y(t)) = c \in \mathbb{R}$. Polku γ siis kulkee tasa-arvojoukossa $f(x,y) = c$. Oletetaan, että $x, y \in \mathcal{L}^1((a,b))$. Tällöin*

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \;=\; 0 \text{ kaikilla } t \in (a,b).$$

Toisin sanoen, vektori ∇f on kohtisuorassa tasa-arvojoukossa kulkevaan polkuun $\gamma \in \mathcal{L}^1$ nähden.

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Oletetaan, että $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Tutkitaan funktion f ääriarvoja joukossa

$$A_0 \;=\; \{ \, (x,y) \in A \mid g(x,y) = 0 \, \},$$

missä $g : A \to \mathbb{R}$ on reaaliarvoinen funktio, $g \in \mathcal{L}^1(A)$. Funktion f (lokaali) ääriarvo joukossa A_0 tarkoittaa funktion $f \restriction A_0$ (lokaalia) ääriarvoa.

Tarkastellaan funktioiden f ja g kuvaajia avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja pistettä $(x_0, y_0) \in A_0$. Tarkastelumme on *epäformaali*; tarkoituksena on rakentaa nk. *Lagrangen kertoimiin* liittyvä taustaintuitio. Monia patologisia ilmiöitä jätetään tässä tarkastelussa huomioimatta.

Tutkitaan tilannetta, jossa jollekin pisteen (x_0, y_0) palloympäristölle $B \subseteq A$ on mahdollista määritellä polku $\gamma : (a,b) \to A_0$ siten että

$$\gamma((a,b)) \;=\; \{ \, \gamma(t) \mid t \in (a,b) \, \} \;= A_0 \cap B.$$

Toisin sanoen, tasa-arvojoukon A_0 ympäristössä B oleva osa on polku γ. (Tarkemmin, $A_0 \cap B$ on polun γ kuva.) Oletetaan että $\gamma'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a,b)$.

Oletetaan, että polku γ kulkee pisteessä $s \in (a,b)$ siten että funktion f tasa-arvojoukko (eli "korkeuskäyrä") ei ole pisteessä $\gamma(s)$ polun γ suuntainen. Tällöin funktiolla $f \restriction A_0$ ei voi olla lokaalia ääriarvoa pisteessä $\gamma(s)$, sillä funktion f arvon on "noustava" tai "laskettava" kyseisessä pisteessä. Oletetaan että funktiolla $f \restriction A_0$ on ääriarvo pisteessä (x_0, y_0). Polun γ on kuljettava funktion f pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan tasa-arvokäyrän suuntaisesti.

Polku γ määrää polun $\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$,

$$\beta(t) \;=\; \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma(t))\big),$$

joka vastaa polkua γ, mutta kulkee funktion f kuvaajaa pitkin avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Olkoon

$$C \;=\; \{\ (x, y, f(x, y)) \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\ \},$$

eli C on tasa-arvojoukon $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ kuva funktion f suhteen. Funktion f kuvaajalle piirretty "korkeuskäyrä" C ja polku β kulkevat samaan suuntaan pisteessä $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Polku γ siis kulkee funktion f tasa-arvokäyrän

$$\{\ (x, y) \in A \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\ \}$$

suuntaisesti ääriarvopisteessä (x_0, y_0). Olkoon $t \in \mathbb{R}$ reaaliluku siten että $\gamma(t) = (x_0, y_0)$. Vektori $\gamma'(t)$ määrää polun γ suunnan pisteessä (x_0, y_0). Toisaalta, määritelmän mukaan γ kulkee funktion g tasa-arvojoukossa. Vektori $\gamma'(t)$ on siis g:n tasa-arvojoukon suuntainen pisteessä (x_0, y_0). Täten $\gamma'(t)$ on kohtisuorassa vektorin $\nabla g(x_0, y_0)$ kanssa Lauseen 3.19 nojalla. Täten, käyttäen vielä kerran Lausetta 3.19, päättelemme, että

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0),$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Ääriarvopisteessä siis funktioiden f ja g gradientit ovat samansuuntaiset (tai vastakkaissuuntaiset).

Tämä tarkastelu antaa taustaintuition seuraavalle lauseelle, jonka muodollisen todistuksen sivuutamme.

Lause 3.20. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ sekä $g : A \to \mathbb{R}$ funktioita, $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Olkoon $A_0 = \{\ (x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\ \}$. Jos funktiolla $f \restriction A_0$ on lokaali ääriarvokohta pisteessä $(x_0, y_0) \in A_0$ ja lisäksi $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, niin*

$$\nabla f(x_0, y_0) \;=\; \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lukuja λ kutsutaan funktion f *Lagrangen kertoimiksi.*

4 Usean muuttujan funktioiden integraalilaskentaa

4.1 Kaksinkertaiset integraalit

Olkoot $a < b$ ja $c < d$ reaalilukuja. Joukko

$$R \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\ \} \;=\; [a,b\,] \times [c,d\,]$$

on reaalilukujen a, b, c ja d rajoittama *suljettu suorakaide*. Olkoon $f : R \to \mathbb{R}$ jatkuva reaaliarvoinen funktio. Tavoitteenamme on määritellä funktion f *integraali*

$$\int_R f(x,y)\ dxdy \;=\; \int\!\!\int_R \ f(x,y)\ dxdy.$$

suljetun suorakaiteen R yli.

Aloitetaan määrittelemällä suorakaiteen $R = [a,b\,] \times [c,d\,]$ *ositus*. Suorakaiteen R ositus saadaan välien $[a,b\,]$ ja $[c,d\,]$ osituksista. Välin $[a,b\,]$ ositus on äärellinen joukko

$$P_1 \;=\; \{x_0, x_1, ..., x_m\},$$

missä

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b.$$

Vastaavasti, välin $[c,d\,]$ ositus on äärellinen joukko

$$P_2 \;=\; \{y_0, y_1, ..., y_n\},$$

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d.$$

Karteesinen tulo

$$P \;=\; P_1 \times P_2 \;=\; \{\ (x_i, y_j) \mid x_i \in P_1,\ y_j \in P_2\ \}$$

on suorakaiteen R ositus. Ositus P siis koostuu pisteistä (x_i, y_j).

Ositus P jakaa suljetun suorakaiteen R pienempiin suljettuihin suorakaiteisiin

$$R_{ij} \;=\; \{\ (x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\ \}.$$

Jatkuva funktio f saa maksimi- ja minimiarvonsa jokaisella suljetulla suorakaitella R_{ij}. Olkoot M_{ij} ja m_{ij} maksimi- ja minimiarvot suorakaitella R_{ij}. Summa

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big)$$

on osituksen P *yläsumma* $U_f(P)$ funktiolle f. Summa

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big)$$

on osituksen P *alasumma* $L_f(P)$ funktiolle f.

Voidaan osoittaa, että jos f on jatkuva, niin on olemassa täsmälleen yksi luku I joka toteuttaa ehdon

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

jokaisella osituksella P.

Olkoon R suljettu suorakaide ja $f : R \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon I reaaliluku, joka toteuttaa ehdon

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

jokaisella suorakaiteen R osituksella P. Määrittelemme, että

$$\int_R f(x,y)\;dxdy \;=\; \int\int_R f(x,y)\;dxdy \;=\; I.$$

Olkoon R suljettu suorakaide ja $f : R \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(x,y) \geq 0$ jokaisella $(x,y) \in R$. Funktion f kuvaaja $z = f(x,y)$ vastaa pintaa suorakaiteen R yläpuolella. Tarkastellaan suorakaiteen R ja pinnan $z = f(x,y)$ väliin jäävän alueen T tilavuutta.[5]

Olkoon P suorakaiteen R ositus, joka määrittelee pienemmät suorakaiteet R_{ij}. Jokaisen pienemmän suorakaiteen R_{ij} ja funktion f kuvaajan väliin jää pienempi pylväsmäinen alue T_{ij} siten että

$$m_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big) \;\leq\; \text{tilavuus}(T_{ij}) \;\leq\; M_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big).$$

Tässä m_{ij} on funktion f minimiarvo joukossa R_{ij}, ja M_{ij} on funktion f maksimiarvo joukossa R_{ij}. Näin ollen

$$L_f(P) \leq \text{tilavuus}(T) \leq U_f(P).$$

Koska tämä pätee kaikille osituksille P, päättelemme että

$$\text{tilavuus}(T) \;=\; \int_R f(x,y)\;dxdy.$$

Edelleen päättelemme että

$$\text{pinta-ala}(R) \;=\; \int_R 1\;dxdy \;=\; \int_R dxdy \;=\; \int\int_R dxdy.$$

[5]Tässä yhteydessä voi herätä kysymys, mitä tilavuudella tarkoitetaan. Useissa tarkasteluissa yksinkertaisesti *määritellään*, että tilavuus $= \int_R f(x,y)dxdy$, kun f on jatkuva.

Esimerkki 4.1. Lasketaan integraali

$$\int_R y - 2 + x \; dxdy,$$

missä $R = [1,4] \times [1,3]$.

Olkoon $P_1 = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ mielivaltainen suljetun välin $[1,4]$ ositus, ja $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ mielivaltainen suljetun välin $[1,3]$ ositus. Määritellään suljetun suorakaiteen $R = [1,4] \times [1,3]$ ositus $P = P_1 \times P_2$.

Funktio f saa maksimiarvon M_{ij} ja minimiarvon m_{ij} jokaisella suorakaiteella

$$R_{ij} \;=\; \{\ (x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{i-1} \le y \le y_i\ \}.$$

Havaitsemme, että $M_{ij} = y_j - 2 + x_i$ ja $m_{ij} = y_{j-1} - 2 + x_{i-1}$. Merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ja $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Nyt

$$L_f(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_{j-1} - 2 + x_{i-1})\Delta x_i \Delta y_j,$$

$$U_f(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_j - 2 + x_i)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Jokaisella i, j pätee

$$y_{j-1} - 2 + x_{i-1} \le \frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) - 2 + \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \le y_j - 2 + x_i.$$

Täten

$$L_f(P) \;\le\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) - 2 + \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j \;\le\; U_f(P).$$

Summa

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(y_j + y_{j-1}) - 2 + \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(y_j + y_{j-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -2\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Ensimmäinen näistä kolmesta termistä saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(y_j + y_{j-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j \;&=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}(y_j^2 - y_{j-1}^2)\Delta x_i \\
&=\; \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - y_{j-1}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i\Big) = \frac{1}{2}(9-1)(4-1) = 12.
\end{aligned}$$

(Huomaa, että $y_{j-1}^2 - y_j^2 \;+\; y_{j-1+1}^2 - y_{j+1}^2 \;=\; y_{j-1}^2 - y_{j+1}^2$). Toinen kolmesta termistä tulee muotoon

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -2\Delta x_i \Delta y_j \\
&\qquad\qquad =\; -2\Big(\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j\Big) \;=\; -2(4-1)(3-1) = -12.
\end{aligned}$$

Kolmas termi tulee muotoon

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\Big)\Delta x_i \Delta y_j \;&=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2)\Delta y_j \\
&=\; \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - x_{i-1}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j\Big) = \frac{1}{2}(16-1)(3-1) = 15.
\end{aligned}$$

$$L_f(P) \le 12 - 12 + 15 \le U_f(P),$$

eli

$$L_f(P) \le 15 \le U_f(P)$$

pätee mielivaltaisella osituksella P. Tällä perustella

$$\int_R y - 2 + x \; dxdy \;=\; 15,$$

joten onnistuimme laskemaan tämän integraalin suoraan integraalin määritelmän perusteella. Näin ei kuitenkaan yleensä tehdä. $\Box$

Tutkitaan seuraavaksi integraaleja $\int_\Omega f(x,y)\;dxdy$, missä Ω ei ole suorakaide.

Joukko $S \subseteq \mathbb{R}^2$ on *nollajoukko*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen (mahdollisesti äärellinen) jono suorakaiteita $R_i = [a_i, b_i\,] \times [c_i, d_i\,]$, että

$$S \;\subseteq\; \bigcup_i R_i,$$

ja suorakaiteiden R_i pinta-alojen summa on korkeintaan ε, eli

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{pinta-ala}(R_i) \quad < \quad \varepsilon.$$

Joukko S on siis nollajoukko, mikäli mielivaltaisen pienelle pinta-alan ylärajalle löytyy kokoelma suorakaiteita, joiden yhdiste *peittää* joukon S, ja lisäksi suorakaiteiden yhdisteen pinta-ala on pienempi kuin annettu yläraja.

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ rajoitettu ja suljettu joukko. Olkoon reuna $\partial\Omega$ nollajoukko. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon R jokin suorakaide $[a, b] \times [c, d]$ joka *peittää* joukon Ω, eli pätee että $\Omega \subseteq R$. Määritellään funktio $f_R : R \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f_R\,(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{kun } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Olkoon P suorakaiteen R ositus, joka jakaa R:n pienempiin suorakaiteisiin R_{ij}, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. Määritellään

$$M_{ij} \;=\; sup\{\ r \in \mathbb{R} \mid r = f_R(x, y) \text{ jollain } (x, y) \in R_{ij}\ \}$$

ja

$$m_{ij} \;=\; inf\{\ r \in \mathbb{R} \mid r = f_R(x, y) \text{ jollain } (x, y) \in R_{ij}\ \}.$$

Summa

$$\sum_{i=i}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big)$$

on osituksen P *yläsumma* $U_{f_R}(P)$ funktiolle f_R. Summa

$$\sum_{i=i}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\big(\text{pinta-ala}(R_{ij})\big)$$

on osituksen P *alasumma* $L_{f_R}(P)$ funktiolle f_R. On mahdollista osoittaa, että on olemassa täsmälleen yksi reaaliluku I siten, että kaikille suorakaiteen R osituksille P pätee

$$L_{f_R}(P) \;\le\; I \;\le\; U_{f_R}(P).$$

Määrittelemme että

$$\begin{aligned} \int_R f_R(x, y)\ dxdy = \int\int_R f_R(x, y)\ dxdy \\ = \int\int_\Omega f(x, y)\ dxdy = \int_\Omega f(x, y)\ dxdy = I. \end{aligned}$$

On helppo nähdä, että kaikille joukon Ω peittäville suorakaiteille R' ja R'' pätee $\int_{R'} f_{R'}(x,y)\ dxdy = \int_{R''} f_{R''}(x,y)\ dxdy$.

Sovelluksissa joukon Ω reuna $\partial\Omega$ vastaa usein kahta tai useampaa käyrää $y = g(x)$, $x = h(y)$ jne., missä g ja h ovat jatkuvia funktioita. Joukko Ω on käyrien rajoittama alue.

Kun funktio f on ei-negatiivinen joukossa Ω, integraali

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy$$

on joukkojen Ω ja $z = f(x,y)$ väliin jäävän kappaleen T tilavuus, eli

$$\text{tilavuus}(T) \ = \ \int_\Omega f(x,y)\ dxdy.$$

Lisäksi

$$\text{pinta-ala}(\Omega) \ = \ \int_\Omega 1\ dxdy \ = \ \int_\Omega \ dxdy.$$

Olkoon Ω suljettu ja rajoitettu joukko, ja olkoon $\partial\Omega$ nollajoukko. Olkoot $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Integraalille voidaan todistaa seuraavat ominaisuudet.

1. $$\int_\Omega af(x,y) + bg(x,y)\ dxdy \ = \ a\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ + \ b\int_\Omega g(x,y)\ dxdy.$$

2. Jos $f \geq 0$ joukossa Ω, niin
$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ \geq \ 0.$$

3. Jos $f \leq g$ joukossa Ω, niin
$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ \leq \ \int_\Omega g(x,y)\ dxdy.$$

4. Olkoot $\Omega_1, ..., \Omega_n$ sellaisia suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, että jokainen $\partial\Omega_i$ on nollajoukko, ja lisäksi $\Omega_i \cap \Omega_j \subseteq \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ kaikilla i ja $j \neq i$. Olkoon $\Omega = \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_n$. Tällöin
$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_{\Omega_1} f(x,y)\ dxdy + ... + \int_{\Omega_n} f(x,y)\ dxdy.$$

4.2 Kaksinkertaisten integraalien laskeminen iteroituina integraaleina

Epätyhjä joukko $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ on *säännöllinen*, jos se on rajoitettu ja suljettu ja $\partial\Omega$ on nollajoukko. Käyrien $y = g(x)$, $x = h(y)$ jne. rajoittamien säännöllisten joukkojen Ω tapauksessa integraali $\int_\Omega f(x,y)\ dxdy$ on usein helppo määrittää käyttämällä *iteroituja integraaleja*. Tämä tarkoittaa integroimista ensiksi esim. muuttuja x suhteen ja tämän jälkeen muuttujan y suhteen.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, reaalilukuja ja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita siten että $g \leq h$, eli $g(x) \leq h(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin sanomme, että säännöllinen joukko

$$H = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\ \}$$

on *tyyppiä I*. Säännöllinen joukko

$$K = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b,\ g(y) \leq x \leq h(y)\ \}$$

on *tyyppiä II*.

Olkoon Ω tyyppiä I oleva joukko jota rajoittavat jatkuvat funktiot g ja h, $g \leq h$, välillä $[a,b]$. Toisin sanoen,

$$\Omega \ = \ \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\ \}.$$

Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. On mahdollista osoittaa, että tällöin

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ = \ \int\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy \Big) dx.$$

Ensiksi siis integroidaan $f(x,y)$ muuttujan y suhteen pisteestä $y = g(x)$ pisteeseen $y = h(x)$. Näin saatu tulos integroidaan muuttujan x suhteen pisteestä a pisteeseen b.

On helppo ymmärtää tämän kaavan taustalla oleva geometrinen intuitio. Olkoon T joukkojen Ω ja $z = f(x,y)$ rajoittama kolmiulotteinen kappale. Nyt

$$\text{tilavuus}(T) \ = \ \int_\Omega f(x,y)\ dxdy.$$

Toisaalta, pisteessä $x \in [a,b]$ antaa integraali

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy$$

pinta-alan $A(x)$, joka vastaa kappaleen T poikkileikkausta yz-tason suuntaisella tasolla pisteessä x. Tämä integraali siis antaa pinta-alan x:n funktiona, eli siis

$$A(x) \;=\; \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\;dy.$$

Havaitsemme, että

$$\int_{\Omega} f(x,y)\;dxdy \;=\; \text{tilavuus}(T) \;=\; \int_a^b A(x)\;dx \;=\; \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\;dy\Big)dx.$$

Olkoon Ω tyyppiä II oleva joukko jota rajoittavat jatkuvat funktiot $x = g(y)$ ja $x = h(y)$, $g \leq h$, välillä $[c,d]$. Toisin sanoen,

$$\Omega \;=\; \{\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\; g(y) \leq x \leq h(y) \;\}.$$

Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. On mahdollista osoittaa, että tällöin

$$\int_{\Omega} f(x,y)\;dxdy \;=\; \int\int_{\Omega} f(x,y)\;dxdy \;=\; \int_c^d \Big(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\;dx\Big)dy.$$

Ensiksi siis integroidaan $f(x,y)$ muuttujan x suhteen pisteestä $x = g(y)$ pisteeseen $x = h(y)$. Näin saatu tulos integroidaan muuttujan y suhteen pisteestä c pisteeseen d.

Esimerkki 4.2. Lasketaan integraali

$$\int_{\Omega} x^4 - 2y\;dxdy,$$

missä Ω on tyyppiä I oleva joukko välillä $[-1,1]$, jota rajoittavat funktiot

$y = -x^2$ ja $y = x^2$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x^4 - 2y \; dxdy &= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-x^2}^{x^2} x^4 - 2y \; dy \Big) \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[x^4 y - y^2 \Big]_{-x^2}^{x^2} \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^6 - x^4) - (-x^6 - x^4) \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2x^6 \; dx \\
&= \Big[\frac{2}{7} x^7 \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

4.3 Riemannin summat

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ säännöllinen joukko. Joukon Ω *säännöllinen ositus* on äärellinen jono $\Omega_1, ..., \Omega_n$ siten että seuraavat ehdot pätevät.

1. Joukot Ω ovat säännöllisiä.

2. Jokaiselle i ja $j \neq i$ pätee $\Omega_i \cap \Omega_j \subseteq \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$.

3. Joukko Ω on joukkojen $\Omega_1, ..., \Omega_n$ yhdiste, toisin sanoen, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$.

Merkintä $\{\Omega_i\}$ viittaa joukon Ω säännölliseen ositukseen. Osituksen $\{\Omega_i\}$ *normi* $||\{\Omega_i\}||$ on

$$\max\{\ d(\Omega_i) \mid 1 \leq i \leq n\ \},$$

missä $d(\Omega_i) = \sup\{\ |x - y| \mid x, y \in \Omega_i\ \}$, eli siis joukon Ω_i pisteiden välisten etäisyyksien supremum.

Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *Riemannin summa* on mielivaltainen summa

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\text{pinta-ala}(\Omega_i),$$

eli summa, jossa on $n \in \mathbb{N}_+$ kappaletta tuloja

$$f(x_i, y_i)\text{pinta-ala}(\Omega_i),$$

missä piste $(x_i, y_i) \in \Omega_i$ on jokin piste joukossa Ω_i. Joukot Ω_i muodostavat jonon $\Omega_1, ..., \Omega_n$, joka on joukon Ω säännöllinen ositus.

Huomaa, että yksittäista ositusta $\Omega_1, ..., \Omega_n$ kohden voi olla olemassa useita Riemannin summia, sillä pisteet $(x_i, y_i) \in \Omega_i$ voidaan valita monella eri tavalla. Lisäksi eri ositukset $\Omega_1, ..., \Omega_n$ ja $\Omega'_1, ..., \Omega'_m$ voivat johtaa erisuuruisiin Riemannin summiin.

Olkoon $\delta > 0$ jokin reaaliluku. Jos joukon Ω säännölliselle ositukselle $\{\Omega_i\}$ pätee $||\{\Omega_i\}|| < \delta$, sanomme että ositus $\{\Omega_i\}$ on *δ-ositus.*

Seuraava lause karakterisoi integraalin $\int_\Omega f(x, y)\ dxdy$ funktion f Riemannin summien raja-arvona.

Lause 4.3. *Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ säännöllinen joukko ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa jokin $\delta > 0$ siten, että jokaiselle joukon Ω säännölliseen δ-ositukseen liittyvälle Riemannin summalle S pätee*

$$|\ S - \int_\Omega f(x, y)\ dxdy\ |\ <\ \varepsilon.$$

Integraali $\int_\Omega f(x, y)\ dxdy$ siis saadaan Riemannin summien raja-arvona, kun säännöllisen osituksen normi lähestyy nollaa.

4.4 Integrointi napakoordinaatistossa

Reaalitason $\mathbb{R}^2$ piste (x, y) paikannetaan *napakoordinaatistossa* antamalla pisteen (x, y) etäisyys eli säde r origosta sekä vektorin (x, y) ja positiivisen x-akselin välinen kulma θ. Eli, napakoordinaatit identifioivat pisteen (x, y) antamalle sille etäisyyden ja suunnan.

Kaikkien napakoordinaattien joukko on joukko $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Napakoordinaatti (r, θ) vastaa tavallisen karteesisen koordinaatioston pistettä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mikäli

1. $r^2 = x^2 + y^2$,
2. $r \cos\theta = x$,
3. $r \sin\theta = y$.

Huomaa, että (r, θ) ja $(r, \theta + 2n\pi)$ vastaavat samaa tavallisen xy-koordinaatiston pistettä. Lisäksi, r saa olla myös negatiivinen. Piste (r, θ) voidaan ilmaista myös pisteenä $(-r, \theta + \pi)$.

Esimerkiksi napakoordinaatiston piste $(2, \frac{\pi}{2})$ vastaa xy-tason pistettä $(0, 2)$. Toisaalta, xy-tason pistettä $(-1, 0)$ vastaa napakoordinaatiston piste $(1, \pi)$, ja myös esim. piste $(1, 3\pi)$.

Olkoot α ja β reaalilukuja siten että $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$. Olkoon

$$\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$$

funktio, jonka jokainen arvo on ei-negatiivinen. Tarkastellaan napakoordinaattipisteiden

$$C = \{ \ (r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ 0 \leq r \leq \rho(\theta) \ \}$$

joukkoa. Esimerkiksi jos $\rho(\theta) = 1$ kaikilla θ, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ja $\beta = \frac{\pi}{2}$, niin joukkoon C kuuluvat ne napakoordinaatit, jotka vastaavat xy-tason suljetun yksikköpallon oikeanpuoleista puolikasta, eli joukkoa

$$\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0 \ \}.$$

Tyyppiä

$$\{ \ (r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ 0 \leq r \leq \rho(\theta) \ \}$$

oleva napakoordinaattijoukko identifioi xy-tason origokeskisen sektorimaisen alueen, jonka keskuskulma on α:sta β:aan, ja jota rajoittaa käyrän $\rho(\theta)$ kuvaaja napakoordinaatistossa.[6] Yllä olevassa esimerkissä $\rho(\theta) = 1$ kaikilla θ, eli funktion ρ kuvaaja on yksikköympyrän kehän osa kulmien α ja β välillä, mutta tietenkin $\rho(\theta)$ voisi olla monimutkaisempikin funktio.

Olkoon α ja β reaalilukuja siten että $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, ja olkoon

$$\rho : [\alpha, \beta\,] \to \mathbb{R}$$

jatkuva ei-negatiivinen funktio. Olkoon Γ joukko napakoordinaatteja,

$$\Gamma \;=\; \{\ (r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq \rho(\theta)\ \}.$$

Olkoon Ω se joukko xy-tason pisteitä, jotka vastaavat joukon Γ koordinaatteja. Joukko Ω on siis sektorimainen origokeskinen alue, jota rajoittaa funktion $\rho(\theta)$ kuvaaja napakoordinaatistossa. Joukon Ω pinta-ala saadaan kaavasta

$$\text{pinta-ala}(\Omega) \;=\; \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(\rho(\theta))^2\ d\theta.$$

Perustelemme väitteen lyhyesti. Ositetaan väli $[\alpha, \beta\,]$ osituksella

$$P \;=\; \{\,\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{n-1}, \theta_n\,\}$$

siten, että

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

Tarkastellaan sektorimaista aluetta Ω_i kulmien θ_{i-1} ja θ_i välissä, jota rajoittaa funktion ρ kuvaaja. Jatkuva funktio ρ saa välillä $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ maksimiarvon R_i ja minimiarvon r_i. Olkoon $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta_i$. Nyt

$$\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i \;\leq\; A_i \;\leq\; \frac{1}{2}R_i^2\Delta\theta_i.$$

(Muista, että r-säteisen sektorin pinta-ala on $\frac{1}{2}r^2\theta$, kun keskuskulma on θ.) Täten joukon Ω pinta-ala A toteuttaa yhtälön

$$L_f(P) \;\leq\; A \;\leq\; U_f(P),$$

[6] Huomaa, että funktion ρ kuvaaja napakoordinaattien avulla ymmärrettynä ei ole sama kuin funktion ρ tavallinen kuvaaja ymmärrettynä karteesisessa koordinaatistossa. Kun jokin funktio ρ on eksplisiittisesti spesifioitu funktioksi, jossa muuttujana on kulma θ, niin tyypillisesti tarkastelemme funktion ρ kuvaajaa napakoordinaatistossa. Napakoordinaatistossa funktion $\rho(\theta) = 1$ kuvaaja on yksikköympyrän kehä (tai kehän osa), kun taas karteesisessa koordinaatistossa funktion $\rho(\theta) = 1$ kuvaaja vastaa funktion $f(x) = 1$ kuvaajaa.

missä f on funktio joka saadaan kaavasta $f(\theta) = \frac{1}{2}(\rho(\theta))^2$. Tässä $L_f(P)$ ja $U_f(P)$ viittaavat tavallisen integraalin ala- ja yläsummiin reaalivälillä $[\alpha, \beta\,]$. Koska

$$L_f(P) \;\leq\; A \;\leq\; U_f(P),$$

pätee mielivaltaiselle ositukselle P, päättelemme että

$$A \;=\; \int_\alpha^\beta f(\theta)\; d\theta \;=\; \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(\rho(\theta))^2\; d\theta.$$

Olkoon α ja β reaalilukuja siten että $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, ja olkoon $\rho_1 : [\alpha, \beta\,] \to \mathbb{R}$ ja $\rho_1 : [\alpha, \beta\,] \to \mathbb{R}$ jatkuvia ei-negatiivisia funktioita, $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ kaikilla $\theta \in [\alpha, \beta\,]$. Olkoon Γ joukko napakoordinaatteja,

$$\Gamma \;=\; \{\; (r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\; \rho_1(\theta) \leq r \leq \rho_2(\theta) \;\}.$$

Olkoon Ω se joukko xy-tason pisteitä, jotka vastaavat joukon Γ koordinaatteja. Joukko Ω on siis funktion ρ_2 rajoittama origokeskinen sektorimainen alue, josta on poistettu funktion ρ_1 rajoittama origokeskinen sektorimainen alue, eli Ω on funktioiden ρ_1 ja ρ_2 kuvaajien väliin jäävä alue. Tyyppiä Ω olevaa säännöllistä joukkoa sanotaan *polaarista tyyppiä I* olevaksi joukoksi. Selvästi pätee

$$\text{pinta-ala}(\Omega) \;=\; \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\Big((\rho_2(\theta))^2 - (\rho_1(\theta))^2\Big) d\theta.$$

Tavallisen yksiulotteisen integraalilaskennan teorian perusteella pätee, että

$$\frac{1}{2}\Big((\rho_2(\theta))^2 - (\rho_1(\theta))^2\Big) \;=\; \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} r\; dr.$$

Täten

$$\begin{aligned} \text{pinta-ala}(\Omega) \;&=\; \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\Big((\rho_2(\theta))^2 - (\rho_1(\theta))^2\Big) d\theta \\ &=\; \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} r\; dr d\theta = \int_\Gamma r\; dr d\theta. \end{aligned}$$

Täten siis

$$\text{pinta-ala}(\Omega) \;=\; \int_\Gamma r\; dr d\theta.$$

Tämä yhteys auttaa usein laskemaan integraaleja, joita olisi muuten vaikea laskea. Integroitava kaava muuttuu ideaalitapauksessa huomattavasti alkuperäistä yksinkertaisemmaksi.

Luennolla osoitamme, että

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_\Gamma f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ drd\theta.$$

Tämä koordinaattimuunnoskaava on avuksi useissa integrointia vaativissa tilanteissa.

Esimerkki 4.4. Määritetään integraali

$$\int_\Omega xy\ dxdy,$$

missä Ω on suljetun yksikköpallon ensimmäinen neljännes.

Nyt siis

$$\Omega \ = \ \{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\ \}.$$

Täten

$$\Gamma \ = \ \{\ (r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid \ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ \}.$$

Täten

$$\begin{aligned}\int_\Omega xy\ dxdy \ &= \ \int_\Gamma (r\cos\theta)(r\sin\theta)r\ drd\theta \\ &= \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\ drd\theta. = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\ d\theta \\ &= \ \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \ = \ \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

4.5 Kolminkertaiset integraalit ja koordinaattimuunnokset

Olkoon $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ ja $c_1 < c_2$ reaalilukuja. Määritellään laatikko

$$R \;=\; \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2,\ c_1 \leq x \leq c_2\ \}.$$

Olkoon

$$P_1 \;=\; \{x_0, x_1, ..., x_m\}$$

välin $[a_1, a_2\,]$ ositus. Vastaavasti, olkoot

$$P_2 \;=\; \{y_0, y_1, ..., y_n\}$$

ja

$$P_3 \;=\; \{z_0, z_1, ..., z_l\}$$

välien $[b_1, b_2\,]$ ja $[c_1, c_2\,]$ ositukset. Nyt joukko

$$P \;=\; P_1 \times P_2 \times P_3$$

on laatikon R ositus pienempiin laatikoihin

$$R_{ijk} \;=\; \{\ (x,y,z) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j,\ z_{k-1} \leq z \leq z_k\ \}.$$

Olkoon $f : R \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Jokainen laatikko R_{ijk} on rajoitettu ja suljettu joukko, joten f saa maksimi- ja minimiarvon jokaisessa laatikossa R_{ijk}. Merkitköön M_{ijk} funktion f maksimiarvoa joukossa R_{ijk}, ja merkitköön m_{ijk} funktion f minimiarvoa joukossa R_{ijk}. Olkoon $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ja vastaavasti $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ ja $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Määritellään funktion f yläsumma

$$U_f(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} M_{ijk}\Big(\text{tilavuus}(R_{ijk})\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

ositukselle P. Analogisesti, määritellään funktion f alasumma

$$L_f(P) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} m_{ijk}\Big(\text{tilavuus}(R_{ijk})\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} m_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

ositukselle P. Voidaan osoittaa, että on olemassa täsmälleen yksi luku I siten että

$$L_f(P) \;\leq\; I \;\leq\; U_f(P)$$

pätee kaikille laatikon R osituksille P. Määrittelemme, että kyseinen luku I on funktion f integraali laatikon R yli, eli

$$\int_R f \; dxdydz \;=\; \int\int\int_R f \; dxdydz \;=\; I.$$

Joukon $A \subseteq \mathbb{R}^3$ reuna ∂A on *nollajoukko*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen mahdollisesti äärellinen jono laatikoita

$$R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [e_i, f_i],$$

että

$$\partial A \;\subseteq\; \bigcup_{i=1} R_i,$$

ja laatikoiden R_i tilavuuksien summa on korkeintaan ε.

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ rajoitettu ja suljettu joukko. Olkoon reuna $\partial\Omega$ nollajoukko. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon R jokin laatikko $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ joka *peittää* joukon Ω, eli pätee että $\Omega \subseteq R$. Määritellään funktio $f_R : R \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f_R(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{kun } (x, y, z) \in \Omega, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

On mahdollista osoittaa, että on olemassa täsmälleen yksi reaaliluku siten, että kaikille laatikon R osituksille P pätee

$$L_{f_R}(P) \;\leq\; I \;\leq\; U_{f_R}(P).$$

Määrittelemme, että

$$\begin{aligned}\int_R f(x, y, z) \; dxdydz &= \int\int\int_R f(x, y, z) \; dxdydz \\ &= \int\int\int_\Omega f(x, y, z) \; dxdydz = \int_\Omega f(x, y, z) \; dxdydz = I.\end{aligned}$$

Tällaiselle kolminkertaiselle integraalille pätee

$$\int\int\int_\Omega dxdydz \;=\; \int_\Omega dxdydz \;=\; \text{tilavuus}(\Omega).$$

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko. Olkoot $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Tällöin voidaan todistaa seuraavat ehdot.

1.

$$\int_\Omega af(x,y,z) + bg(x,y,z)\ dxdydz$$
$$= a\int_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz\ +\ b\int_\Omega g(x,y,z)\ dxdydz.$$

2. Jos $f \geq 0$ joukossa Ω, niin

$$\int_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz\ \geq\ 0.$$

3. Jos $f \leq g$ joukossa Ω, niin

$$\int_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz\ \leq\ \int_\Omega g(x,y,z)\ dxdydz.$$

4. Olkoot $\Omega_1, ..., \Omega_n$ sellaisia suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, että jokainen $\partial\Omega_i$ on nollajoukko, ja lisäksi $\Omega_i \cap \Omega_j \subseteq \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ kaikilla i ja $j \neq i$. Olkoon $\Omega = \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_n$. Tällöin

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz\ =\ \int_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dxdydz + ... + \int_{\Omega_n} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Sovelluksissa integrointialue Ω on usein yksinkertaisten yhtälöiden avulla määriteltyjen pintojen rajaama yhtenäinen alue. Tällöin on tavallisesti mahdollista määrittää integraali $\int_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz$ kolminkertaisten iteroitujen integraalien avulla.

Olkoot a_1 ja $a_2 > a_1$ reaalilukuja. Olkoon $\Omega_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ tyyppiä I oleva, jatkuvien funktioiden g_1 ja g_2 rajoittama alue siten, että

1. $a_1 \leq x \leq a_2$,
2. $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

Olkoot $\psi_1 : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$ ja $\psi_2 : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita siten että $\psi_1(x,y) \leq \psi_2(x,y)$ kaikille $(x,y) \in \Omega_{xy}$. Olkoon $T \subseteq \mathbb{R}^3$ määritelty siten että

1. $a_1 \leq x \leq a_2$,
2. $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$,
3. $\psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$.

Käytännön sovelluksissa integrointialue T on usein ilmaistavissa tällaisessa (tai vastaavassa) muodossa. Voidaan osoittaa, että

$$\begin{aligned}\int_T f(x,y,z)\ dxdydz &= \int\int\int_T f(x,y,z)\ dxdydz \\ &= \int_{\Omega_{xy}}\Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\Big)dxdy.\end{aligned}$$

Joukko Ω_{xy} määräytyy x:ää ja y:tä koskevista ehdoista $a_1 \leq x \leq a_2$ ja $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, joten kaksinkertaisten integraalien ominaisuuksien perusteella saamme yhtälön

$$\int_T f(x,y,z)\ dxdydz = \int_{a_1}^{a_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dzdydx.$$

Integroimme siis ensiksi muuttujan z suhteen, sitten muuttujan y suhteen ja viimeiseksi muuttujan x suhteen.

Esimerkki 4.5. Olkoot $g_1 : [0,2\,] \to \mathbb{R}$ ja $g_2 : [0,2\,] \to \mathbb{R}$ funktioita siten että $g_1(x) = 0$ ja $g_2(x) = x$ kaikilla $x \in [0,2\,]$. Olkoon $\Omega_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ joukko siten että $0 \leq x \leq 2$ ja

$$g_1(x) = 0 \leq y \leq x = g_2(x).$$

Olkoot $\psi_1 : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$ ja $\psi_2 : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$ funktioita siten että $\psi_1(x,y) = 0$ ja $\psi_2(x,y) = 4 - x^2$ kaikille $(x,y) \in \Omega_{xy}$. Olkoon $T \subseteq \mathbb{R}^3$ joukko siten että ehdot $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ ja $\psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$ toteutuvat.

Olkoon K joukon T määräämä kolmiulotteinen kappale, jonka tiheys ρ (eli massa per tilavuus) pisteessä $(x,y,z) \in T$ määräytyy yhtälöstä $\rho(x,y,z) =$

xyz. Lasketaan kappaleen K massa m.

$$\begin{aligned}
m &= \int_T xyz\ dxdydz \\
&= \int_0^2 \int_0^x \int_0^{4-x^2} xyz\ dzdydx \\
&= \int_0^2 \int_0^x \Big[\frac{1}{2}xyz^2\Big]_0^{4-x^2} dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^x x(4-x^2)^2 y\ dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big[\frac{1}{2}x(4-x^2)^2 y^2\Big]_0^x\ dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x^3(4-x^2)^2\ dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x^3(16-8x^2+x^4)\ dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[4x^4 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{1}{8}x^8\Big]_0^2 \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Kolminkertaisia integraaleja on usein helppo määrittää siirtymällä *sylinterikoordinaatistoon*. Sylinterikoordinaatit identifioivat pisteen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ antamalla napakoordinaatit xy-tasossa, korkeuskoordinaatin z pysyessä ennallaan. Eli pistettä (x, y, z) vastaa sylinterikoordinaatistossa piste (r, θ, z), missä (r, θ) on pisteen (x, y) napakoordinaattiesitys. Lisäksi määrittelemme, että sylinterikoordinaattiesityksessä $r \geq 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi\,]$. Huomaa, että koska kulma 0 vastaa kulmaa 2π, niin esim. koordinaatit $(1, 0, 1)$ ja $(1, 2\pi, 1)$ vastaavat samaa pistettä.

Joukon $T \subseteq \mathbb{R}^3$ toteuttaessa sopivat säännöllisyysehdot[7], voidaan osoittaa, että on voimassa yhteys

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\ dxdydz \ = \int\int\int_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\ dzdrd\theta,$$

missä S on integrointialueen T tarkoituksenmukainen esitys sylinterikoordinaatistossa. Tästä yhteydestä on hyötyä useissa integrointia vaativissa tilanteissa. Esim. integrointi z-akselin suhteen symmetristen joukkojen yli on usein helppo tehdä sylinterikoordinaatistossa.

Kolminkertaisia integraaleja määritetään usein myös *pallokoordinaatistossa*. Pallokoordinaatit identifioivat pisteen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ antamalla napakoordinaatit xy-tasossa, ja lisäksi kulman ϕ suhteessa positiiviseen z-akseliin. Eli pistettä (x,y,z) vastaa pallokoordinaatistossa piste (r,θ,ϕ), missä (r,θ) on pisteen (x,y) napakoordinaattiesitys ja ϕ on positiivisen z-akselin ja vektorin (x,y,z) välinen kulma. Vaadimme, että $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi\,]$ ja $\phi \in [0,\pi\,]$. Uutta kulmaa ϕ kutsutaan *napakulmaksi*; tuttu napakoordinaatistokulma θ on *atsimutaalikulma*.

Joukon $T \subseteq \mathbb{R}^3$ toteuttaessa sopivat säännöllisyysehdot[8], voidaan osoittaa, että on voimassa yhteys

$$\begin{aligned}&\int\int\int_T f(x,y,z)\ dxdydz \\ &\qquad = \int\int\int_S f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)r^2\sin\phi\ drd\theta d\phi,\end{aligned}$$

missä S on integrointialueen T tarkoituksenmukainen esitys pallokoordinaatistossa. Lisäksi pätee

$$\text{tilavuus}(T) \ = \int\int\int_S r^2\sin\phi\ drd\theta\ d\phi.$$

Transformaatiot karteesisista integraaleista napakoordinaatistossa (sekä sylinteri- ja pallokoordinaatistossa) tehtäviin integraaleihin ovat seurausta yleisemmästä muuttujan vaihtoon littyvästä teoriasta.

Olkoot $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ja $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ avoimia joukkoja, $\Gamma := \overline{D}$ ja $\Omega := \overline{D'}$ rajoitettuja ja suljettuja joukkoja, ja ∂D ja $\partial D'$ nollajoukkoja. Olkoon $w : \Gamma \to \Omega$ funktio siten, että $w \restriction D$ on bijektio ja koordinaattifunktiot $w_1 \restriction D$ ja

[7] Emme käsittele kyseisiä säännöllisyysehtoja tarkemmin. Kyseiset ehdot toteutuvat tyypillisissä sovellustilanteissa. Esim. äärellisen monen jatkuvan pintafunktion rajaama yhteinäinen rajoitettu alue toteuttaa vaaditut säännöllisyysehdot.

[8] Ks. sylinterikoordinaatteja koskeva alaviite.

$w_2 \restriction D'$ ovat luokassa $\mathcal{L}^1(D)$.[9] Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tiettyjen teknisten lisäehtojen vallitessa voidaan osoittaa, että tällöin

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dxdy \;=\; \int\int_\Gamma f(w_1(u,v), w_2(u,v))\,|\,\det w'(u,v)\,|\,dudv.$$

Tässä siis

$$w'(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1 w_1(u,v) & \partial_2 w_1(u,v) \\ \partial_1 w_2(u,v) & \partial_2 w_2(u,v) \end{pmatrix},$$

eli $\det w'(u,v)$ on funktion w Jacobin determinantti pisteessä (u,v). Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$\text{pinta-ala}(\Omega) \;=\; \int\int_\Gamma |\,\det w'(u,v)\,|\,dudv.$$

Esimerkki 4.6. Lasketaan integraali $\int\int_\Omega (x+y)^2\,dxdy$, missä Ω on suorien $x+y=0$, $x+y=1$, $2x-y=0$ ja $2x-y=3$ rajoittama alue. Tarkastelemalla joukkoa Ω rajoittavia suoria, päädymme koordinaattimuunnokseen xy-koordinaatistosta uv-koordinaatistoon siten, että $u = x+y$ ja $v = 2x-y$ pätevät. Tämä kuvaa alueen Ω suorakaiteeksi uv-koordinaatistossa, jota rajoittavat u-akseli, v-akseli sekä suorat $u=1$ ja $v=3$.

Seuraavaksi esitämme x:n ja y:n muuttujien u ja v funktioina yllä olevien yhtälöiden perusteella. Saamme

$$u+v \;=\; (x+y)+(2x-y) \;=\; 3x$$

sekä

$$2u-v \;=\; (2x+2y) \;-\; (2x-y) \;=\; 3y,$$

joten

$$x \;=\; \frac{u+v}{3}$$

ja

$$y \;=\; \frac{2u-v}{3}.$$

Määrittelemme kuvauksen $w : \Gamma \to \Omega$ siten, että

$$w(u,v) \;=\; \big(w_1(u,v), w_2(u,v)\big) \;=\; \big(x(u,v), y(u,v)\big) \;=\; \Big(\frac{u+v}{3}, \frac{2u-v}{3}\Big).$$

[9] Merkintä $f \restriction A$ viittaa funktioon, joka saadaan funktiosta f rajoittamalla määrittelyjoukko joukkoon A.

Kuvauksen Jacobin determinantti on

$$\det w'(u,v) \;=\; \det\begin{pmatrix} \partial_1(\frac{u+v}{3}) & \partial_2(\frac{u+v}{3}) \\ \\ \partial_1(\frac{2u-v}{3}) & \partial_2(\frac{2u-v}{3}) \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} \partial_1(\frac{u+v}{3}) & \partial_1(\frac{2u-v}{3}) \\ \\ \partial_2(\frac{u+v}{3}) & \partial_2(\frac{2u-v}{3}) \end{pmatrix},$$

mistä saamme että $\det w'(u,v) \;=\; -\frac{1}{3}$. Täten

$$\begin{aligned} \int\int_\Omega (x+y)^2\ dxdy \;&=\; \int\int_\Gamma u^2|\det w'(u,v)|\ dudv \\ &=\; \frac{1}{3}\int_0^3\int_0^1\ u^2\ dudv \\ &=\; \frac{1}{3}\Big(\int_0^3 dv\Big)\Big(\int_0^1\ u^2\ du\Big) \\ &=\; \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4.6 Käyräintegraalit

Polut ovat vektoriarvoisia jatkuvia funktioita $\gamma : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, jotka kuvaavat reaalivälin $V \subseteq \mathbb{R}$ avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Käsittelimme polkuja osiossa 3.8. Polku $\gamma : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on *säännöllinen*, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat.

1. Jokainen koordinaattifunktio $\gamma_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva joukossa V, eli toisin sanoen γ on jatkuva, ja $\gamma_i'(t)$ on olemassa jokaisella sisäpisteellä $t \in \mathit{int}\, V$ ja jokaisella i, ja lisäksi jokainen funktio γ_i' on jatkuva joukossa $\mathit{int}\, V$.

2. Jokaisella $t \in \mathit{int}\, V$ pätee $\gamma'(t) \neq 0$, eli ainakin jollekin koordinaatille i pätee $\gamma_i'(t) \neq 0$.

Kuten havaitsimme osiossa 3.8, vektori $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t)\big)$ määrää suunnan, johon polku γ kulkee pisteessä $\gamma(t)$, kun t kasvaa, eli kuljettaessa pisteestä $\gamma(t)$ eteenpäin.

Esimerkki 4.7. Määritellään polku $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ siten että $\gamma_1(t) = 0$ ja $\gamma_2(t) = t^2$. Tämä polku kulkee y-akselilla. Polun kuva lähtee liikkeelle pisteestä $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ pitkin y-akselia ja kohti origoa. Kun $t = 0 \in [-1, 1]$, niin $\gamma(t) = (0, 0)$. Tässä pisteessä polun kulkusuunta muuttuu äkillisesti, ja polku alkaa liikkua takaisin kohti pistettä $(0, 1)$, joka saavutetaan viimein, kun $t = 1$. Koska $\gamma'(0) = (0, 0)$, polku γ ei ole säännöllinen. Polun kulkusuunta muuttuu äkillisesti pisteessä $\gamma(0)$.

Polun $\gamma : V \to \mathbb{R}^n$ kuva, eli joukko

$$\{\ s \in \mathbb{R}^n \mid s = \gamma(t) \text{ jollekin } t \in V\ \}$$

voi olla myös toisen polun δ kuva.

Esimerkki 4.8. Olkoon $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ polku siten että $\gamma(x) = (x, x^2)$. 0lkoon $\delta : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ polku siten että $\delta(x) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x^2)$. Näillä poluilla on täsmälleen sama kuva, nimittäin käyrä

$$C \ = \ \{\ (s, s^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq 1\ \}.$$

Käyrä C on siis paraabelin $y = x^2$ kuvaaja välillä $x \in [0, 1]$.

Sanomme, että polut γ ja δ *parametrisoivat* saman käyrän. Polkua δ voidaan myös kutsua polun γ vaihtoehtoiseksi parametrisoinniksi.

Olkoot a ja $b > a$ sekä c ja $d > c$ reaalilukuja. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ avoin joukko s.e. $[c, d\,] \subseteq A$. Olkoon ψ luokkaan $\mathcal{L}^1(A)$ kuuluva bijektio $\psi : A \to \mathbb{R}$ siten, että kaikille $x, y \in [c, d\,]$ pätee

$$x < y \Leftrightarrow \psi(x) < \psi(y).$$

Olkoon φ funktion ψ rajoittuma joukkoon $[c, d\,]$, eli φ on funktio $\varphi : [c, d\,] \longrightarrow [a, b\,]$ siten, että $\varphi(x) = \psi(x)$ kaikilla $x \in [c, d\,]$. Tällöin sanomme, että φ on *säännöllinen parametrimuunnos.* Olkoon $\gamma : [a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ säännöllinen polku ja $\varphi : [c, d\,] \longrightarrow [a, b\,]$ säännöllinen parametrimuunnos. Sanomme, että polku

$$\gamma \circ \varphi : [c, d\,] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

on polun γ *säännöllisesti vaihtoehtoinen parametrisointi.*

Käyräintegraalit ovat integraaleja, joissa integrointialueena on jokin käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Käsittelemme tapauksia, jossa integrointialueena on jonkin säännöllisen polun $\gamma : [a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kuva. Käyräintegraaleja on kahta eri päätyyppiä. Yhdelle näistä käytetään merkintää $\int_\gamma f\, dr$ ja toiselle $\int_\gamma F \cdot dr$. Käsittelemme ensiksi jälkimmäistä tyyppiä olevia käyräintegraaleja. Nämä ovat saaneet alkunsa fysiikasta, ja fysiikassa nimenomaan *työn* käsitteestä.

Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funktio, joka antaa jokaisessa avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä s vektorin $F(s)$. Funktio F voi kuvata esim. *voimaa*, joka vaikuttaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$; voiman suunta ja suuruus vaihtelee pisteestä toiseen. Vektorin $F(s)$ pituus vastaa voiman suuruutta pisteessä s, ja vektorin $F(s)$ suunta luonnollisesti pisteessä s vaikuttavan voiman suuntaa. Esimerkiksi tuulen aiheuttamaa työntövoimaa voidaan kuvata tällä tavalla. Myös tuulen nopeus on luonnollista kuvata funktiona joukolta $\mathbb{R}^3$ joukolle $\mathbb{R}^3$. Tällaista funktiota F kutsutaan *vektorikentäksi.* Reaaliarvoinen funktio $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ on *skalaarikenttä.* Esim. *lämpötila* on tyypillinen skalaarikenttä.

Jos kuljemme suoraviivaisen matkan r voiman F suunnassa, on voiman F tekemä työ (esim. tuulen tekemä, kulkuamme edistävä työntötyö) määritelmän mukaan $W = Fr$. Jos kuitenkin kuljemme monimutkaista reittiä, joka kulkee useassa kohtaa $s \in \mathbb{R}^3$ eri suuntaan kuin vektorikentän $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ määräämä voima $F(s) \in \mathbb{R}^3$, on voiman F tekemä työ monimutkaisempi määrittää.

Olkoon $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\big)$, $t \in [0, 1\,]$, kulkemamme polku. Tarkastellaan pisteitä $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ ja $\gamma(t + h) \in \mathbb{R}^3$, missä h on pieni. Pisteessä $\gamma(t)$ vaikuttava voima on $F(\gamma(t))$. Koska h on pieni, on vektori

$$k = (\gamma(t + h) - \gamma(t)) \in \mathbb{R}^3$$

likimääräisesti samansuuntainen kulkusuuntamme kanssa. Voiman F tekemä työ pisteestä $\gamma(t)$ pisteeseen $\gamma(t + h)$ voidaan siis laskea likimääräisesti kertomalla voimavektorin $F(\gamma(t))$ komponentti vektorin k suunnassa vektorin k pituudella, eli likimääräisesti pätee

$$W(t + h) - W(t) \;\cong F(\gamma(t)) \cdot (\gamma(t + h) - \gamma(t)),$$

missä $W : [0,1] \to \mathbb{R}$ on funktio siten että $W(x)$ on tehty työ pisteestä $\gamma(0)$ pisteeseen $\gamma(x)$. Mitä lähempänä h on nollaa, sitä tarkemmin yhtälön tulisi päteä. Kun yhtälö jaetaan puolittain h:lla, saadaan

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{t} \cong \frac{F(\gamma(t)) \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t))}{h}$$

Työ määritellään funktioksi W siten että yllä olevan yhtälön molempien puolien raja-arvot ovat samat, kun $h \to 0$, eli määritellään

$$W'(t) \;=\; F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Lisäksi asetetaan $W(0) = 0$, eli polun γ alussa tehtynä oleva työ on olematon. Täten polulla γ pisteeseen $\gamma(t)$ saavuttaessa kertynyt työ saadaan yhtälöstä

$$W(t) = W(t) - W(0) = \int_0^t W'(t)\, dt = \int_0^t F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Tehty työ pisteessä $\gamma(t)$ siis määritellään yhtälöllä

$$W(t) = \int_0^t F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Esittämämme yllä olevaan määritelmään päätyvä ajatusketju johtaa käyräintegraalin $\int_\gamma F \cdot dr$ määritelmään.

Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorikenttä, joka on jatkuva säännöllisen polun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ kuvajoukossa. Määrittelemme, että

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr \;=\; \int_\gamma F \cdot dr \;=\; \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Olkoon C polun $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kuvajoukko, eli

$$C = \{\; r \in \mathbb{R}^3 \mid r = \gamma(t) \text{ jollekin } t \in [a,b] \;\}.$$

Jotta integraalin $\int_\gamma F \cdot dr$ ominaisuudet vastaisivat integraalin määritelmän taustalla olevaa intuitiota, olisi toivottavaa, että integraalin $\int_\gamma F \cdot dr$ arvo ei riippuisi polun γ parametrisoinnista. Eli sopivien säännöllisyysehtojen toteutuessa tulisi polun γ suunnassa kulkevien polkujen δ, joiden kuva on C, johtaa samaan käyräintegraalin arvoon kuin polun γ. Seuraava lause osoittaa, että näin onkin.

Lause 4.9. *Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorikenttä, joka on jatkuva säännöllisen polun $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kuvajoukossa. Olkoon $\delta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ polun γ säännöllisesti vaihtoehtoinen parametrisointi. Tällöin*

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\delta F \cdot dr.$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Jos γ on polku, joka koostuu äärellisestä jonosta toisiaan seuraavia säännöllisiä polkuja $\gamma_1 : [a_1, a_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ... , $\gamma_n : [a_n, a_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, missä $\gamma_i(a_{i+1}) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ kaikilla i, niin määrittelelmme että

$$\int_\gamma F \cdot dr \;=\; \int_{\gamma_1} F \cdot dr + ... + \int_{\gamma_n} F \cdot dr.$$

Sanomme, että polku γ on *paloittain säännöllinen.* Polun γ määrittelyjoukko on siis väli $[a_1, a_{n+1}]$.

Olkoon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen polku. Määritellään polku $\gamma_- : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siten että $\gamma_-(t) = \gamma(a + b - t)$. Tällöin polulla γ_- on sama kuvajoukko kuin polulla γ, mutta polku γ_- kulkee kuvajoukossa päinvastaiseen suuntaan suhteessa polkuun γ. On helpohko osoittaa, että

$$\int_\gamma F \cdot dr \;=\; -\int_{\gamma_-} F \cdot dr.$$

Tämä onkin intuitiivista, ottaen huomioon käyräintegraalin $\int_\gamma F \cdot dr$ määritelmään johtanut taustaintuitio, jossa voimaa vastaava vektorikenttä F tekee työn $\int_\gamma F \cdot dr$ polulla γ.

Lause 4.10. *Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^3$ avoin joukko. Olkoon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paloittain säännöllinen polku, jonka kuvajoukolle C pätee $C \subseteq D$. Olkoon $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funktio, $f \in \mathcal{L}^1(D)$. Tällöin*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot dr \;=\; f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

Lause 4.10 sanoo, että vektorikentän ∇f polulla γ määräämä integraali ei riipukaan kuljetusta polusta γ, vaan ainoastaan funktion f arvoista päätepisteissä $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$. Tällä yhteydellä on mielenkiintoisia seurauksia fysiikassa.

Käsitellään sitten käyräintegraaleja $\int_\gamma f dr$, missä f on reaaliarvoinen funktio.

Olkoon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen polku. Olkoon

$$C = \{\ \gamma(t) \mid t \in [a, b]\ \}$$

käyrän γ kuva. Oletetaan että γ on bijektio. Joukon C ositus on äärellinen joukko pisteitä

$$P = \{\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_n)\},$$

missä jokainen alkio t_i on välin $[a, b\,]$ piste, $t_0 = a$ ja $t_n = b$, ja lisäksi pätee

$$t_0 < t_1 < ... < t_n.$$

Määritellään

$$L_P(C) = d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + ... + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)),$$

missä $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ on pisteiden $\gamma(t_i)$ ja $\gamma(t_{i+1})$ välinen etäisyys. Määritellään

$$pituus(C) \;=\; sup\{\; L_P(C) \mid P \text{ on } C\text{:n ositus } \},$$

missä *sup* viittaa pienimpään ylärajaan, eli supremumiin. Mitä tiheämpi ositus P on, sitä tarkemmin suorat segmentit pisteistä $\gamma(t_i)$ pisteisiin $\gamma(t_{i+1})$ kulkevat polun γ tangenttien $\gamma'(t_i)$ määräämissä suunnissa. Segmentti pisteestä $\gamma(t_i)$ pisteeseen $\gamma(t_{i+1})$ on pituudeltaan

$$\sqrt{\big(\gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i)\big)^2 + \big(\gamma_2(t_{i+1}) - \gamma_2(t_i)\big)^2 + \big(\gamma_3(t_{i+1}) - \gamma_3(t_i)\big)^2},$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sqrt{\Big(\frac{\gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\gamma_2(t_{i+1}) - \gamma_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\gamma_3(t_{i+1}) - \gamma_3(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\Big)^2}\,(t_{i+1}-t_i).$$

Kun ositusta hienonnetaan, eli kun $(t_{i+1} - t_i) = \Delta_i t \longrightarrow 0$, niin

$$\frac{\gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \;\longrightarrow \gamma_1'(t_i),$$

ja samoin koordinaattifunktioille γ_2 ja γ_3. Pisteiden $\gamma(t_i)$ ja $\gamma(t_{i+1})$ välissä olevan segmentin pituus lähestyy näin ollen arvoa

$$\sqrt{\gamma_1'(t_i)^2 + \gamma_2'(t_i)^2 + \gamma_3'(t_i)^2}\;\Delta_i t.$$

Voidaankin osoittaa, että

$$pituus(C) \;=\; \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}\; dt.$$

Olkoon A joukko siten että jokaiselle $t \in [a, b\,]$ pätee $\gamma(t) \in A$. Olkoon $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Pyritään määrittelemään integraali $\int_\gamma f dr$ siten että sen geometrinen tulkinta vastaa sen "aidan" pinta-alaa, jonka korkeus pisteessä $\gamma(t)$ of $f(\gamma(t))$. Tässä aidan pinta-ala lasketaan aidan yhdeltä puolelta

Segmentti pisteestä $\gamma(t_i)$ pisteeseen $\gamma(t_{i+1})$ kontribuoi "aidan" pinta-alaan likimäärin termin

$$f(\gamma(t_i))\sqrt{\big(\gamma_1(t_{i+1})-\gamma_1(t_i)\big)^2+\big(\gamma_2(t_{i+1})-\gamma_2(t_i)\big)^2+\big(\gamma_3(t_{i+1})-\gamma_3(t_i)\big)^2}$$

verran. Tarkkuus paranee, kun $\Delta_i t \longrightarrow 0$. Täsmälleen samaan tapaan kuten yllä päätellään että tämä termi lähestyy termiä

$$f(\gamma(t_i))\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2+\gamma_3'(t)^2}\Delta_i t,$$

kun $\Delta_i t$ lähestyy nollaa. Näin ollen määrittelemme, että

$$\int_\gamma f\,dr = \int_a^b f(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2+\gamma_3'(t)^2}\;dt.$$

4.7 Greenin lause

Olkoon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paloittain säännöllinen polku. Sanomme että γ on *suljettu*, mikäli $\gamma(a) = \gamma(b)$. Polku siis päättyy alkupisteeseensä. Polku γ on *yksinkertainen*, mikäli kaikille $s, t \in [a, b]$ siten että $s < t$ pätee ehto

$$\gamma(s) = \gamma(t) \;\Leftrightarrow\; \big(s = a \wedge t = b\big),$$

eli polku ei leikkaa itseään muualla kuin päätepisteissä. Esim. ellipsit ovat tällaistein polkujen kuvajoukkoja, mutta esim. kahdeksikot eivät. Mikäli paloittain säännöllinen, yksinkertainen ja suljettu polku γ "kiertää vastapäivään", polku on *positiivisesti suunnistettu.* Tällöin polun γ sisäpuolelleen sulkema alue on aina polun vasemmalla puolella polun kulkusuuntaan nähden. Suljetun ja yksinkertaisen polun sisään sulkeutuvaa aluetta kutsutaan polun määräämäksi alueeksi; myös polun itsensä pisteet kuuluvat polun määräämään alueeseen.[10]

Lause 4.11. *Olkoon γ paloittain säännöllinen, yksinkertainen, suljettu ja positiivisesti suunnistettu polku. Olkoon Ω polun γ määräämä alue. Olkoon D avoin joukko siten että $\Omega \subseteq D$. Olkoon $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä siten että molemmat koordinaattifunktiot F_1 ja F_2 ovat luokassa $\mathcal{L}^1(D)$. Tällöin*

$$\int_\gamma F \cdot dr \;=\; \int\!\!\int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dxdy.$$

Todistus. Luennolla esitämme todistuksen erikoistapauksessa, joka kattaa tyypillisimmät sovellustilanteet. □

Taustaintuitio Greenin teoreeman takana liittyy vektorikenttään $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ liittyvään rotaatioliikkeesseen. Tarkastelemme tätä tarkemmin luennolla. Greenin lause voidaan nähdä myös analyysin peruslauseen (integraali alueen yli määräytyy alueen rajalla saaduista arvoista) yleistymänä reaalisuoralta reaalitasoon.

4.8 Pintaintegraalit

Pintaintegraalien teoriaa käsittelemme luennolla.

[10]Tässä esitetyt polun kulkuun liittyvät määritelmät voidaan esittää astetta muodollisemmin ja täsmällisemmin. Käsittelemämme määritelmät kuitenkin riittävät tarkoituksiimme, ja ovat sovelluksia ajatellen muutenkin yleensä riittävät.

4.9 Divergenssi ja Roottori

Vektorikentän F *divergenssi* pisteessä x mittaa kenttään F liittyvää, pisteestä x poispäin suuntautuvaa virtaustendenssiä. Esimerkiksi jos kentän F nuolikaaviossa on pistessä x pisteestä jokaiseen suuntaan poispäin osoittavia, verrattain pitkiä nuolia, on kentän F divergenssi pisteessä x verrattain suuri.

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ joukko ja $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ funktio. Funktion F divergenssi $\nabla \cdot F$ määritellään kaavalla

$$\nabla \cdot F \; = \; \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3.$$

Divergenssi $\nabla \cdot F$ on siis reaaliarvoinen funktio. Divergenssille $\nabla \cdot F$ käytetään myös merkintää *div* F. Käsittelemme tämän kaavan ja divergenssin intuitiivisen tulkinnan yhteyden luennolla.

Vektorikentän F *roottori* pisteessä x mittaa kentän F pyörtymistä eli rotaatiotendenssiä pisteessä x. Kentän pyörtymä xy-tasossa koodataan vektorilla, joka on kohtisuorassa xy-tasoa kohtaan ja osoittaa oikean käden säännön määräämään suuntaan: vektori osoittaa oikean käden peukalon määräämään suuntaan, mikäli vektorikenttä F pyörtyy oikean käden muiden sormien määräämällä tavalla. Tämä vektori on roottorin z-komponentti, joka siis mittaa kentän F pyörtymää xy-tasossa. Roottorivektorin F muut komponentit määritellään vastaavalla tavalla.

Funktion F roottori $\nabla \times F$ määritellään kaavalla

$$\nabla \times F \; = \; \big(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2,\; \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3,\; \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\big).$$

Roottorille $\nabla \times F$ käytetään myös merkintää *curl* F. Roottorin intuitiivisen tulkinnan ja yllä olevan kaavan välistä yhteyttä käsitellään luennolla.

Roottori on helppo muistaa seuraavassa determinanttimuodossa.

$$\nabla \times F(x,y,z) \; = \; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix},$$

missä e_1, e_2 ja e_2 ovat standardit kantavektorit $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Usein vektoreille e_1, e_2 ja e_3 käytetään merkintöjä i, j ja k. Yllä oleva determinatti on siis vain muistituki.

Propositio 4.12. *Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio siten että $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Tällöin*

$$\nabla \times \nabla f \; = 0.$$

Todistus. Proposition käytännössä triviaali todistus käsitellään luennolla. □

Propositio 4.13. *Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorikenttä siten, että jokainen koordinaattifunktio on luokassa $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Tällöin*

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) \; = \; 0.$$

Todistus. Käsitellään luennolla. □

4.10 Gaussin ja Stokesin lauseet

Tutustumme seuraavaksi Gaussin lauseeseen. Gaussin lausetta kutsutaan myös *divergenssilauseeksi*. Lause kertoo vektorikentän F kokonaisvuon umpinaisen pinnan $S \subseteq \mathbb{R}^3$ läpi, eli integraalin

$$\int\int_S F \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

lausuttuna pinnan S rajoittaman joukon kokonaisdivergenssinä, eli integraalina

$$\int\int\int_T \nabla \cdot F\, dxdydz,$$

missä T on umpinaisen pinnan S rajoittama joukko.

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ avoin joukko. Olkoon $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vektorikenttä siten että $F \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^3$ avoin joukko, ja $T = \overline{U}$ kompakti joukko, $T \subseteq \Omega$. Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^3$ joukko, joka on yhdiste äärellisestä kokoelmasta $S_1, ..., S_n$ säännöllisiä parametrisoituja pintoja, jotka leikkaavaat ainoastaan reunoillaan. Oletetaan, että pinnat S_i ovat suunnistettuja pintoja siten että $S = \partial T$. Olkoon $\overline{n} : S \to \mathbb{R}^3$, funktio, joka antaa jokaisessa pisteessä $(x, y, z) \in S$ pinnan S *ulkonormaalin*, eli yksikkönormaalin, joka osoittaa pois päin joukosta U. Oleelliseti tällaisten reunaehtojen vallitessa[11] pätee

$$\int\int_S F \cdot \overline{n}\, d\sigma \;=\; \int\int\int_T \nabla \cdot F\, dxdydz.$$

Tämä on Gaussin lause, eli divergenssilause. Tämä lause sanoo, että vektorikentän F kokonaispoisvirtaama (eli kokonaisdivergenssi) yli joukon T on täsmälleen sama kuin virtaama joukon T reunan läpi pois päin joukosta T. Lause voidaan tulkita Greenin lauseen korkeampiulotteiseksi analogiaksi. Huomaa lisäksi, että Gaussin lause voidaan nähdä (kuten Greenin lausekin) analyysin peruslauseen yleistymänä korkeampiulotteiseen tapaukseen. Gaussin lausehan sanoo, kuten analyysin peruslausekin, että integraali integrointialueen yli määräytyy integrointialueen reunalle kumuloituvista arvoista.

[11]Tässä antamamme reunaehdot eivät muodosta täsmällistä ja yksiselitteisesti tulkittavaa kokonaisuutta. *Emme* käy läpi Gaussin lauseen täsmällisiä taustaehtoja; niiden muotoileminen vaatisi tarkempaa tarkastelua. Yllä annetut reunaehdot ovat kuitenkin tyypillisten sovellustilanteiden kannalta yleensä riittävän selvät.